

1. 수직선 위의 두 점 A(-3), B(-7) 사이의 거리를 구하면?

- ① 8 ② 6 ③ 4 ④ 2 ⑤ 1

해설

$$\therefore |-7 - (-3)| = 4$$

2. 두 점 $A(1, 2), B(3, -2)$ 를 이은 $\overline{AB}$ 의 B방향으로의 연장선 위에 $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$ 을 만족시키는 점 C의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 61

해설

점 C는 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점이므로
C(5, -6)이다.

$$\therefore a^2 + b^2 = 5^2 + (-6)^2 = 61$$

3. 네 점 $O(0,0)$, $A(-3,0)$, $B(4,0)$, $C(2,5)$ 에 대하여 삼각형 AOC의 넓이는 삼각형 BOC의 넓이의 몇 배인가?

① $\frac{3}{7}$

② $\frac{4}{7}$

③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\triangle AOC$ 와 $\triangle BOC$ 의 높이가 같으므로

$\triangle AOC$ 와 $\triangle BOC$ 의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 비와 같다.

$\overline{AO} : \overline{BO} = 3 : 4$ 이므로 $\triangle AOC$ 의 넓이는 $\triangle BOC$ 의 넓이의 $\frac{3}{4}$ 배이다.

4. 점 $(2, -1)$ 을 지나고, 기울기가 -3 인 직선의 방정식이 $ax+by-5=0$ 일 때 $a+b$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

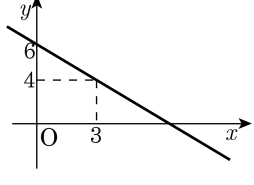
④ 3

⑤ 4

해설

점 (x_1, y_1) 을 지나고 기울기가 m 인
직선의 방정식은 $y - y_1 = m(x - x_1)$ 이므로
구하는 직선의 방정식은 $y - (-1) = -3(x - 2)$
즉 $y = -3x + 5 \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 을 직선의 방정식의 일반형으로 고치면
 $3x + y - 5 = 0$
 $\therefore a + b = 3 + 1 = 4$

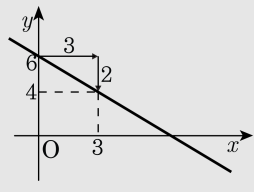
5. 다음 그림의 직선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, $3a + b$ 의 값을 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : $3a + b = 4$

해설



(기울기) = $-\frac{2}{3}$ 이므로 $a = -\frac{2}{3}$

y절편이 6이므로 $b = 6$

따라서 $3a + b = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 6 = 4$

6. 두 그래프 $kx + y = -3$ 과 $2x + (k - 1)y = 6$ 이 만나지 않을 때, 상수 k 의 값은?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

두 그래프가 만나지 않으므로,

연립방정식 $\begin{cases} kx + y = -3 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ 2x + (k - 1)y = 6 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$ 의 해는 없다.

즉, 위의 방정식을 x 에 대하여 정리하면
 $\textcircled{㉠} \times (k - 1) - \textcircled{㉡}$ 에서 $(k^2 - k - 2)x = -3(k + 1)$
 $\therefore (k - 2)(k + 1)x = -3(k + 1)$
여기서, $k = 2$ 이면 $0 \cdot x = -9$ 이므로
연립방정식의 해가 없다.
따라서 구하는 k 의 값은 $k = 2$
(다른 풀이) 두 직선이 평행하기 위한 조건은
 $\frac{2}{k} = \frac{k - 1}{1} = \frac{6}{-3}$
 $\therefore k = 2$

7. 점 $(3, -5)$ 와 직선 $4x - 3y - 12 = 0$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$d = \frac{|4 \times 3 + (-3) \times (-5) + (-12)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 3$$

8. 수직선 위의 두 점 $A(a), B(b)(a > b)$ 사이의 거리 $\overline{AB}$ 는 5이고 점 $C(a + b)$ 의 좌표를 -1 이라 할 때, 점 $D(a - b)$ 의 좌표는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$a > b$ 일때, $A(a), B(b)$ 사이의 거리는 $a - b$ 이므로, $a - b = 5$
따라서 $D(a - b)$ 의 좌표는 5

9. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 인 $\triangle ABC$ 가 $\angle A$ 가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 가 직각이므로

피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 \dots \textcircled{1}$$

이때, 세 점 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 에 대하여

$$\overline{AB}^2 = (-1 - a)^2 + (-5 - 3)^2 = a^2 + 2a + 65$$

$$\overline{CA}^2 = (a - 3)^2 + (3 - 7)^2 = a^2 - 6a + 25$$

$$\overline{BC}^2 = (3 + 1)^2 + (7 + 5)^2 = 160 \text{ 이므로}$$

$$\textcircled{1} \text{에 의해 } 2a^2 - 4a + 90 = 160$$

$$\therefore a^2 - 2a - 35 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a 의 값들의 합은 2이다.

10. 네 점 $O(0, 0)$, $A(3, 1)$, $B(4, 3)$, $C(a, b)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\square OABC$ 가 평행사변형일 때, $a + b$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

평행사변형 $OABC$ 에서 두 대각선 OB , AC 의 중점이 일치하므로

$$\left(2, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

$$\frac{a+3}{2} = 2 \text{에서 } a = 1$$

$$\frac{b+1}{2} = \frac{3}{2} \text{에서 } b = 2$$

$$\therefore a + b = 3$$

11. 두 점 $A(a, 4)$, $B(1, b)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점을 P , y 축 위의 점을 Q 라 하면, $\triangle OPQ$ 의 무게중심은 $G(-1, 1)$ 이다. 이때, $a - b$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$P(x, 0)$, $Q(0, y)$ 라 하면,

$$\frac{0+x+0}{3} = -1, \frac{0+0+y}{3} = 1 \text{에서}$$

$$x = -3, y = 3$$

$$\therefore P(-3, 0), Q(0, 3)$$

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \text{에서}$$

$$(a+3)^2 + 4^2 = (1+3)^2 + b^2$$

$$a^2 + 6a + 9 = b^2$$

$$\overline{QA}^2 = \overline{QB}^2 \text{에서}$$

$$a^2 + (4-3)^2 = 1^2 + (b-3)^2$$

$$a^2 = b^2 - 6b + 9$$

두 식을 변변 빼고 정리하면 $a - b = -3$

12. 세 점 A (1, 5), B (-4, -7), C (5, 2)가 좌표평면 위에 있다. $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 점 D의 좌표를 구하면?

① (0, 0)

② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$$\overline{AB} = 13, \overline{AC} = 5$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$$

D는 B, C를 13 : 5로 내분한 점

$$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

13. 두 직선 $(k-2)x+3y-1=0, y=kx+3$ 이 수직이 되도록 하는 모든 k 의 값을 구하면?

① 3, 1

② 3, -1

③ 4, 2

④ 1, 5

⑤ -2, -3

해설

$$y=kx+3 \Rightarrow kx-y+3=0$$

$$(k-2)k+3 \cdot (-1)=0$$

$$k^2-2k-3=0$$

$$(k-3)(k+1)=0$$

$$\therefore k=3, -1$$

해설

기울기의 곱이 -1임을 이용하면

$$-\frac{k-2}{3} \times k = -1$$

$$\therefore k(k-2)=3$$

$$\therefore k=3, -1$$

14. 직선 $5x+2y+1=0$, $2x-y+4=0$ 의 교점을 지나고, 직선 $x+y+1=0$ 에 수직인 직선의 방정식은?

- ① $x+y+3=0$ ② $x-y+3=0$ ③ $x+y-3=0$
④ $x-y-3=0$ ⑤ $2x+y+3=0$

해설

두 직선 $5x+2y+1=0$, $2x-y+4=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(5x+2y+1)+k(2x-y+4)=0$$

$$\therefore (5+2k)x+(2-k)y+(1+4k)=0 \cdots \text{㉠}$$

이 직선이 $x+y+1=0$ 에 수직이므로

$$(-1) \times \frac{2k+5}{k-2} = -1$$

$$\therefore k = -7 \cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는

직선의 방정식은 $x-y+3=0$

(보충)

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ 의

교점을 지나는 직선은

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$$

15. 두 직선 $y = |x| + 2$ 와 $y = ax + 1 - 2a$ 의 그래프가 교점을 갖지 않을 정수 a 의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\begin{cases} y = |x| + 2 \cdots \textcircled{A} \\ y = ax + 1 - 2a \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

②에서 $a(x - 2) + 1 - y = 0$

즉, a 의 값에 관계없이 정점 $(2, 1)$ 을 지난다.

그림에서 교점을 갖지 않으려면

$(0, 2), (2, 1)$ 을 지나는 직선의 기울기

$\left(-\frac{1}{2}\right)$ 보다 크고

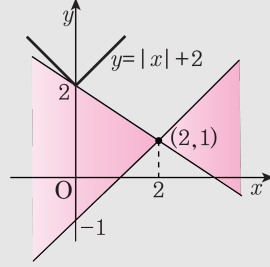
$(0, -1), (2, 1)$ 을 지나는 직선의 기울기

기

1 보다 작거나 같아야 한다.

$$\therefore -\frac{1}{2} < a \leq 1$$

$$\therefore a = 0, a = 1$$



16. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.

$$x^2 - x + 1 = x + k \text{ 에서 } \frac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$$

$$\therefore k = 0$$

이때, $x = 1, y = 1$ 이므로

구하는 점은 $(1, 1)$

$$\therefore a = 1, b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

17. 원점에서의 거리가 1 이고, 점 (1, 2)를 지나는 직선의 방정식이 $ax + by + c = 0$ 으로 표현될 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면? (단, $b \neq 0$)

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

점 (1, 2)를 지나는 직선은
 $y = m(x - 1) + 2$ 에서,
 $mx - y - m + 2 = 0 \cdots \textcircled{1}$
여기서 (0, 0)에 이르는 거리가 1 이므로
 $\frac{|-m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1, |m - 2| = \sqrt{m^2 + 1}$
양변을 제곱하여 정리하면, $m = \frac{3}{4}$
 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면, $\frac{3}{4}x - y + \frac{5}{4} = 0,$
 $3x - 4y + 5 = 0$
 $\therefore a + b + c = 3 - 4 + 5 = 4$

18. 다음은 $\triangle ABC$ 의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만남을 보인 것이다.

직선 BC를 x 축, 변 BC의 수직이등분선을 y 축으로 잡고, $A(a, b), B(-c, 0), C(c, 0)$ 라고 하자. (단, $b \neq 0, c > 0$)
(i) $a \neq c$ 이고 $a \neq -c$ 일 때 직선 AC의 기울기는 $\frac{b}{a-c}$ 이므로, 변 AC의 중점 E를 지나고 변 AC에 수직인 직선의 방정식은 $y = \frac{\text{(가)}}{\text{(가)}}\left(x - \frac{a+c}{2}\right) + \frac{b}{2}$
 $= \frac{\text{(가)}}{\text{(가)}}x + \frac{\text{(나)}}{\text{(나)}} \cdots \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
같은 방법으로, 변 AB의 중점 D를 지나고 변 AB에 수직인 직선의 방정식은 $y = -\frac{a+c}{b}x + \frac{\text{(나)}}{\text{(나)}} \cdots \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
두 직선 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 의 y 절편이 같으므로 세 변의 수직이등분선은 y 축 위의 점 $(0, \frac{\text{(나)}}{\text{(나)}})$ 에서 만난다. 따라서 $\triangle ABC$ 의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.
(ii) $a = c$ 또는 $a = -c$ 일 때 $\triangle ABC$ 는 $\frac{\text{(다)}}{\text{(다)}}$ 이므로 세 변의 수직이등분선은 D 또는 E에서 만난다.
따라서 $\triangle ABC$ 의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.

위

의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ①

$-\frac{a-c}{b}, \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형

②

$-\frac{a-c}{b}, \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 정삼각형

③

$-\frac{a-c}{b}, \frac{-a^2+b^2-c^2}{2b}$, 이등변삼각형

④

$\frac{a-c}{b}, \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 이등변삼각형

⑤

$\frac{a-c}{b}, \frac{-a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형

해설

직선 AC의 기울기가 $\frac{b}{a-c}$ 이므로

변 AC에 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면 $\frac{b}{a-c} \cdot m = -1$ 에서 $m = -\frac{a-c}{b}$ 이다.

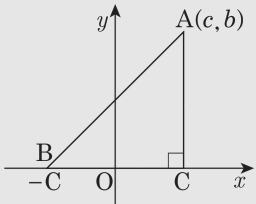
이때, 중점 $E\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 이므로 변

AC에 수직인 직선의 방정식은

$$\begin{aligned} y &= \left[-\frac{a-c}{b}\right]\left(x - \frac{a+c}{2}\right) + \frac{b}{2} \\ &= -\frac{a-c}{b}x + \frac{2b}{a^2-c^2} + \frac{b}{2} \\ &= \left[-\frac{a-c}{b}\right]x + \left[\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right] \end{aligned}$$

즉, (가), (나)에 들어갈 것은 차례로 $-\frac{a-c}{b}, \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$ 이다.

한편, $a = c$ 또는 $a = -c$ 일 때는 다음 그림에서 보면 $\triangle ABC$ 는 직각삼각형이다.



19. 두 점 A(3, 3), B(1, 6)과 y축 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은?

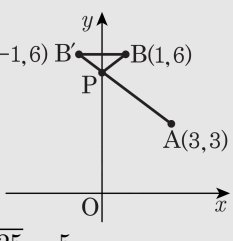
- ① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ 5 ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

점 B의 y축에 대한 대칭점을 점 $B'(-1, 6)$ 이라 하면 $\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P} \geq \overline{AB'}$$

그런데 $\overline{AB'} = \sqrt{(3+1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{25} = 5$
 $\therefore \overline{AP} + \overline{BP} \geq 5$



20. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m, 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답: m

▶ 정답 : 30m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$
 $\therefore a = 30(\text{m})$

21. 두 점 A(3, 0), B(0, 2)에 대하여 $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$ 를 만족하는 점 P의 자취의 방정식은?

① $-3x + 2y + 9 = 0$

② $3x + 2y = 0$

③ $6x - 4y + 9 = 0$

④ $-3x + 2y = 0$

⑤ $-6x + 4y - 5 = 0$

해설

구하는 점을 P(x, y)라 하면

$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$ 에서

$$(x-3)^2 + y^2 - \{x^2 + (y-2)^2\} = 5$$

정리하면 $-6x + 4y = 0$

$$\therefore -3x + 2y = 0$$

22. 세 점 A(1, 6), B(-2, 2), C(4, 1)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC와 임의의 점 P(a, b)에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값이 최소일 때, a + b의 값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

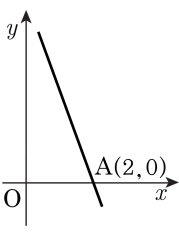
$$\begin{aligned} & \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \\ &= \{(a-1)^2 + (b-6)^2\} + \{(a+2)^2 + (b-2)^2\} \\ &\quad + \{(a-4)^2 + (b-1)^2\} \\ &= 3a^2 - 6a + 3b^2 - 18b + 62 \\ &= 3(a^2 - 2a + 1) + 3(b^2 - 6b + 9) + 32 \\ &= 3(a-1)^2 + 3(b-3)^2 + 32 \end{aligned}$$

이때, a, b는 실수이므로

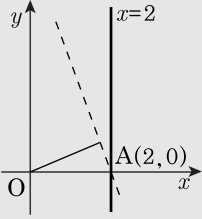
$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \text{의 값은}$$
$$a=1, b=3 \text{일 때 최소이다.}$$
$$\therefore a+b=4$$

23. 점 $A(2,0)$ 을 지나는 임의의 직선 l 에 대하여 원점 O 와 직선 l 사이의 거리의 최댓값은?

- ① 2
- ② 3
- ③ $2\sqrt{2}$
- ④ $\sqrt{5}$
- ⑤ 4



해설



다음의 그림에서 점 $A(2,0)$ 을 지나고 y 축에 평행한 직선 l , 곧 직선 $x=2$ 에 대하여 원점 O 와 l 사이의 거리가 최대가 되며 이 때 그 거리는 2 이다

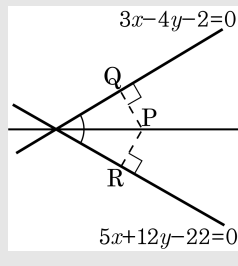
24. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라. (단, a 는 양수, a, b, c 는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$$13(3X-4Y-2) = \pm 5(5X+12Y-22)$$

$$\text{즉, } 13(3X-4Y-2) = 5(5X+12Y-22) \text{ 또는}$$

$$13(3X-4Y-2) = -5(5X+12Y-22) \text{ 정리하면}$$

$$x-8y+6=0 \text{ 또는 } 8x+y-17=0 \text{ 에서}$$

기울기가 양이므로

$$\therefore x-8y+6=0$$

$$\therefore a+b+c=-1$$

25. 두 직선 $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식 중에서 기울기가 양수인 것은?

① $y = x$

② $y = \frac{1}{2}x$

③ $y = \frac{1}{3}x$

④ $y = \frac{1}{4}x$

⑤ $y = \frac{1}{5}x$

해설

P(x, y) 라 하면,

(i) $2x - y - 1 = 0$ 까지의 거리 d_1 은

$$d_1 = \frac{|2x - y - 1|}{\sqrt{4 + 1}}$$

(ii) $x + 2y - 1 = 0$ 까지의 거리 d_2 는

$$d_2 = \frac{|x + 2y - 1|}{\sqrt{1 + 4}}$$

$d_1 = d_2$ 이므로 $|2x - y - 1| = |x + 2y - 1|$

$\therefore 2x - y - 1 = \pm(x + 2y - 1)$

즉, $x - 3y = 0$, $3x + y - 2 = 0$

그런데 기울기가 양수이므로 $x - 3y = 0$

$\therefore y = \frac{1}{3}x$

26. 점 A(6, 2)와 직선 $x+2y-2=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{AP}$ 를 1 : 3으로 내분하는 점의 자취는?

- ① $x-2y-8=0$ ② $x+2y-8=0$ ③ $x-2y+8=0$
④ $x+2y+8=0$ ⑤ $x-2y=0$

해설

P (a , b)라 하면 $a+2b-2=0 \cdots \textcircled{1}$

$\overline{AP}$ 의 1 : 3 내분점을 Q (x , y)라 하면

$$Q(x, y) = \left(\frac{a+18}{1+3}, \frac{b+6}{1+3} \right)$$

$$x = \frac{a+18}{1+3}, y = \frac{b+6}{1+3}$$

$$a = 4x-18, b = 4y-6$$

$\textcircled{1}$ 에 대입하면,

$$4x-18+2(4y-6)-2=0 \Rightarrow x+2y-8=0$$

27. 수직선 위의 5개의 정점 A(-1), B(0), C(1), D(3), E(5)와 동점 P(x)에 대하여 점 P에서 5개의 정점 A, B, C, D, E까지의 거리의 합을 $f(x)$ 라 할 때, $f(x)$ 의 최솟값은?

- ① 8
- ② 9
- ③ 10
- ④ 11
- ⑤ 12

해설

수직선 위에 임의의 동점 P(x)를 잡으면
점 P에서 정점 A, B, C, D, E까지의 거리 $f(x)$ 는
 $f(x) = |x + 1| + |x| + |x - 1| + |x - 3| + |x - 5|$

(i) $x < -1$, $f(x) = -x - 1 - x - x + 1 - x + 3 - x + 5 = -5x + 8$
(ii) $-1 \leq x < 0$, $f(x) = x + 1 - x - x + 1 - x + 3 - x + 5 = -3x + 10$
(iii) $0 \leq x < 1$, $f(x) = x + 1 + x - x + 1 - x + 3 - x + 5 = -x + 10$
(iv) $1 \leq x < 3$, $f(x) = x + 1 + x + x - 1 - x + 3 - x + 5 = x + 8$
(v) $3 \leq x < 5$, $f(x) = x + 1 + x + x - 1 + x - 3 - x + 5 = 3x + 2$
(vi) $5 \leq x$, $f(x) = x + 1 + x + x - 1 + x - 3 + x - 5 = 5x - 8$

이므로
(i)~(vi)의 그래프에서 $x = 1$ 인 경우 $f(x)$ 는 최솟값을 갖는다.
 $\therefore f(1) = |1 + 1| + |1| + |1 - 1| + |1 - 3| + |1 - 5| = 9$

28. 두 점 $A(t, -3)$, $B(1, 2t)$ 에 대하여 선분 AB의 길이의 최솟값은?

- ① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(1-t)^2 + (2t+3)^2} \\ &= \sqrt{5t^2 + 10t + 10} \\ &= \sqrt{5(t+1)^2 + 5} \text{에서} \\ \text{선분 AB의 길이는 } t = -1 \text{ 일 때 최소이다.} \\ \text{따라서 } t = -1 \text{ 일 때, } \overline{AB} &= \sqrt{5}\end{aligned}$$

29. 세 점 A(1, 1), B(2, 4), C(a , 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이 되도록 하는 a 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

삼각형 ABC가 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-a)^2 + 1^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(2-a)^2 + 4^2}$$

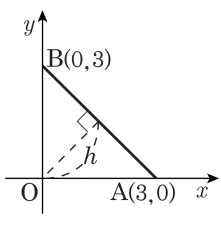
$$2 - 2a + a^2 = 20 - 4a + a^2$$

$$2a = 18$$

$$\therefore a = 9$$

30. 다음 그림은 삼각형 OAB 의 넓이를 이용하여 h 를 구하는 과정이다.

$$\begin{aligned}\triangle OAB &= \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h \\ \text{따라서} \\ h &= (\quad)\end{aligned}$$



() 안에 알맞은 값은?

- ① $\frac{12}{5}$
- ② $\frac{5}{2}$
- ③ 2
- ④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\triangle OAB &= \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{OB} \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times h \\ \frac{9}{2} &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \times h \\ \text{따라서 } h &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

31. 평면위의 두 점 $A(m^2, -m)$, $B(1, m)$ 일 때, 두 점 사이의 거리 $\overline{AB}$ 는?

① m^2

② $m^2 + 1$

③ $m^2 + 2$

④ $m^2 + 3$

⑤ $m^2 + 4$

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(1 - m^2)^2 + (m + m)^2} \\ &= \sqrt{m^4 + 2m^2 + 1} \\ &= \sqrt{(m^2 + 1)^2} = m^2 + 1\end{aligned}$$

32. 두 점 A(-2, 1), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표는?

① $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

② $\left(0, \frac{5}{2}\right)$

③ $\left(0, \frac{9}{2}\right)$

④ $\left(0, \frac{13}{2}\right)$

⑤ $\left(0, \frac{17}{2}\right)$

해설

y축 위의 점 P의 좌표를 $(0, a)$ 라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로

$$\sqrt{(0 - (-2))^2 + (a - 1)^2}$$

$$= \sqrt{(0 - 4)^2 + (a - 5)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 2a + 5 = a^2 - 10a + 41$$

$$8a = 36$$

$$\therefore a = \frac{9}{2}$$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(0, \frac{9}{2}\right)$ 이다.

33. 두 점 A(3, 4), B(5, 2)로부터 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P의 좌표는?

① (-3, 2)

② (0, 0)

③ (3, 1)

④ (1, 0)

⑤ (-2, 3)

해설

점 P의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a-3)^2 + (-4)^2 = (a-5)^2 + (-2)^2$$

$$a^2 - 6a + 25 = a^2 - 10a + 29$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore P(1, 0)$$

34. 두 점 A(4, -2), B(3, 5)로부터 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

- ① P(-2, -1) ② P(-1, 0) ③ P(0, 1)
④ P(1, 2) ⑤ P(2, 3)

해설

점 P의 좌표를 P(0, b)라고 하면

$$\overline{PA} = \sqrt{(0-4)^2 + (b+2)^2} = \sqrt{b^2 + 4b + 20}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(0-3)^2 + (b-5)^2} = \sqrt{b^2 - 10b + 34}$$

이 때, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$$

$$b^2 + 4b + 20 = b^2 - 10b + 34$$

$$14b = 14$$

$$\therefore b = 1$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 P(0, 1)

35. 두 점 A(3,4), B(6,2)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P의 좌표는?

- ① $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ② $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$
④ (4,0) ⑤ (5,0)

해설

x 축 위의 점 P의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면

$$AP = \sqrt{(a-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{a^2 - 6a + 25}$$

$$BP = \sqrt{(a-6)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{a^2 - 12a + 40}$$

조건에서 $AP = BP$ 이므로

$$\sqrt{a^2 - 6a + 25} = \sqrt{a^2 - 12a + 40}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } a^2 - 6a + 25 = a^2 - 12a + 40$$

$$6a = 15, \quad \therefore a = \frac{5}{2}$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

36. 두 점 A(-3, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① (0, 0) ② (1, 0) ③ (2, 0) ④ (3, 0) ⑤ (4, 0)

해설

P의 좌표를 $(x, 0)$ 라 하면

$$\sqrt{(-3-x)^2+2^2}=\sqrt{(4-x)^2+5^2}$$

$$6x+13=-8x+41, \quad x=2$$

$$\therefore P=(2, 0)$$

37. 좌표평면 위의 두 점 A(-2, 1), B(3, 0)에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점의 좌표는?

① (1, -2)

② (0, -2)

③ (1, 2)

④ (-1, 3)

⑤ (2, 1)

해설

y축 위의 점을 $(0, \alpha)$ 라 하면

$$(-2 - 0)^2 + (1 - \alpha)^2 = (0 - 3)^2 + \alpha^2$$

$$\therefore \alpha = -2$$

38. A(-1, -3), B(3, 0)에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점의 y좌표를 구하여라.

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

y축 위의 점을 $(0, \alpha)$ 라 하면

$$\sqrt{(-1-0)^2 + (-3-\alpha)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + \alpha^2}$$

$$\therefore \alpha = -\frac{1}{6}$$

39. 두 점 $(-4, 1)$, $(2, 3)$ 에서 같은 거리에 있는 y 축 위의 점의 좌표는?

- ① $(0, -1)$ ② $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ ③ $\left(0, \frac{1}{4}\right)$
④ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ⑤ $(2, 2)$

해설

y 축 위의 점을 $(0, \alpha)$ 라 하면
 $\sqrt{4^2 + (\alpha - 1)^2} = \sqrt{2^2 + (\alpha - 3)^2}$
 $\therefore \alpha = -1$
 $\therefore y$ 축 위의 점 : $(0, -1)$

40. 두 점 $A(-2, -3)$, $B(-5, 4)$ 에서 같은 거리에 있는 y 축 위의 점 P 의 좌표를 구하면?

① $(0, -2)$

② $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

③ $(0, 1)$

④ $(0, 2)$

⑤ $\left(0, \frac{14}{3}\right)$

해설

P 의 좌표를 $(0, \alpha)$ 라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{(0 - (-2))^2 + (\alpha - (-3))^2}$$

$$= \sqrt{(0 - (-5))^2 + (\alpha - 4)^2}, \alpha = 2$$

$$\therefore P = (0, 2)$$

41. 두 점 A(3, 5), B(4, -2)에서 같은 거리에 있고 x 축 위에 있는 점 P의 좌표는?

㉠ (-7, 0)

㉡ (-4, 0)

㉢ (0, 0)

㉣ (1, 0)

㉤ (3, 0)

해설

P ($a, 0$) 이라 하면

$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$(a - 3)^2 + 5^2 = (a - 4)^2 + 4$, $a = -7$

$\therefore$ P = (-7, 0)

42. 세 점 $A(-1, 1)$, $B(1, -1)$, $C(5, 3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

- ① 정삼각형
- ② $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형
- ③ $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형
- ④ $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형
- ⑤ $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형

해설

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ 이므로
 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

43. 세 점 $A(2, -3)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 2)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

- ① 정삼각형
- ② $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형
- ③ $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형
- ④ $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형
- ⑤ $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형

해설

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 26 = \overline{AC}^2$ 이므로
 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

44. 점 A(1, 2)와 B(-1, -2)를 두 개의 꼭짓점으로 하는 정삼각형의 다른 꼭짓점 C의 좌표를 구하면?

- ① $C(\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- ② $C(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- ③ $C(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- ④ $C(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 또는 $C(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- ⑤ $C(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

해설

정삼각형이므로 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$
점 C의 좌표를 (x, y)라 하면, $\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서
 $\sqrt{(1+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
 $x^2 + 2x + y^2 + 4y = 15 \dots\dots \textcircled{1}$
 $\overline{AB} = \overline{CA}$ 에서
 $\sqrt{(1+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
 $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 15 \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 에서 $x + 2y = 0$
 $\therefore x = -2y$
이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $4y^2 - 4y + y^2 + 4y = 15$
 $\therefore y^2 = 3$
 $\therefore y = \pm\sqrt{3}$
따라서 $x = \mp 2\sqrt{3}$ (복호동순)
 $\therefore C(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

45. 두 점 A(2, 0), B(0, 2) 를 꼭짓점으로 하는 정삼각형 ABC 의 다른 꼭짓점 C 의 좌표를 구하면?

- ① $C(1 + \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$ 또는 $C(1 - \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5})$
② $C(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ 또는 $C(1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5})$
③ $C(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ 또는 $C(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$
④ $C(2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ 또는 $C(1 - \sqrt{3}, 0)$
⑤ $C(0, 1 + \sqrt{3})$ 또는 $(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$

해설

꼭짓점 C 를 (x, y) 라 놓자.

$$\overline{AB}^2 = (2 - 0)^2 + (0 - 2)^2 = 8$$

$$\overline{BC}^2 = (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4$$

$$\overline{CA}^2 = (x - 2)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 4x + 4$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 \text{ 에서}$$

$$8 = x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 - 4x + 4$$

$$x = y \text{ 이므로 } 2x^2 - 4x - 4 = 0, x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{3}$$

따라서 꼭짓점 C 의 좌표는 $C(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ 또는 $C(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$

46. 세 점 A(6, 1), B(-1, 2), C(2, 3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하면?

① O(1, -2)

② O(2, 2)

③ O(2, -2)

④ O(2, -1)

⑤ O(1, -1)

해설

외심의 좌표를 $O(a, b)$ 라 하면

$\overline{OA} = \overline{OB}$ 즉, $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$ 이므로

$$(a-6)^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2$$

$$\therefore 7a - b = 16 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$\overline{OA} = \overline{OC}$, 즉 $\overline{OA}^2 = \overline{OC}^2$ 이므로

$$(a-6)^2 + (b-1)^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2$$

$$\therefore 2a - b = 6 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $a = 2, b = -2$

$$\therefore O(2, -2)$$

47. 다음은 삼각형 ABC에서 변 $\overline{BC}$ 의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB^2} + \overline{AC^2} = 2(\overline{AM^2} + \overline{BM^2})$ 임을 보이는 과정이다. 다음 중 ㉠, ㉡을 차례로 쓴 것을 고르면?

$\overline{BC}$ 를 x 축
 $\overline{BC}$ 의 수직이등분선을 y 축으로 하여
좌표평면을 정하면 점 (㉠)은 원점이다.
이 때, 세 점 A, B, C의 좌표를
각각 (a, b) , $(-c, 0)$, $(c, 0)$ 으로 놓으면
 $\overline{AB^2} + \overline{AC^2} = (\text{㉡}) \cdots (가)$
 $2(\overline{AM^2} + \overline{BM^2}) = (\text{㉡}) \cdots (나)$
(가), (나)에서 $\overline{AB^2} + \overline{AC^2} = 2(\overline{AM^2} + \overline{BM^2})$

- ① $A, a^2 + b^2 + c^2$

② $B, a^2 + b^2 + c^2$

③ $M, a^2 + b^2 + c^2$

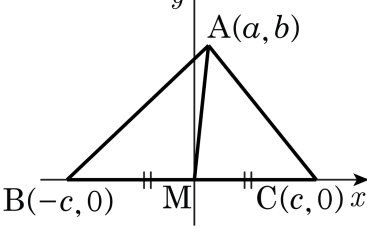
④ $M, 2(a^2 + b^2 + c^2)$

⑤ $C, 2(a^2 + b^2 + c^2)$

해설

㉠ = M
㉡ = $2(a^2 + b^2 + c^2)$

48. $\triangle ABC$ 에서 변 BC 의 중점을 M 이라고 할 때, $\overline{AB^2} + \overline{AC^2} = 2(\overline{AM^2} + \overline{BM^2})$ 이 성립함을 보이는 것이다. (ㄱ), (ㄴ), (ㄷ)에 들어갈 말을 차례로 나열한 것은?



다음 그림과 같이 $\overline{BC}$ 를 x 축 위에 놓고
 $\overline{BC}$ 의 중점 M 을 y 축이 지난다고 가정하면
 M 은 원점이 된다.
 또, $\overline{AB^2} = \text{(ㄱ)}$, $\overline{AC^2} = \text{(ㄴ)}$
 $\overline{AB^2} + \overline{AC^2} = \text{(ㄱ)} + \text{(ㄴ)}$
 $\hspace{10em} = 2(a^2 + b^2 + c^2)$
 $\overline{AM^2} + \overline{BM^2} = \text{(ㄷ)}$
 따라서 $\overline{AB^2} + \overline{AC^2} = 2(\overline{AM^2} + \overline{BM^2})$

- ① $a + b + c$, $a + b - c$, $a + b + c$

② $(a + c)^2 + b^2$, $(a - c)^2 + b^2$, $a + b + c$

③ $a + b + c$, $a + b - c$, $a^2 + b^2 + c^2$

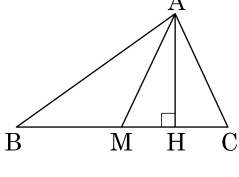
④ $(a + c)^2 + b^2$, $(a - c)^2 + b^2$, $a^2 + b^2 + c^2$

⑤ $2(a + c)^2 + b^2$, $2(a - c)^2 + b^2$, $a^2 + b^2 + c^2$

해설

$\text{(ㄱ)} = (a + c)^2 + b^2$
 $\text{(ㄴ)} = (a - c)^2 + b^2$
 $\text{(ㄷ)} = a^2 + b^2 + c^2$

49. 다음은 예각삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$ 이 성립함을 보인 것이다.



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라하자.

직각삼각형 ABH에서

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \boxed{\text{(가)}}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \overline{BM}^2 + 2\overline{BM} \cdot \overline{MH} + \boxed{\text{(나)}}^2 \cdots \text{㉠}\end{aligned}$$

직각삼각형 AHC에서

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \boxed{\text{(다)}}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \overline{CM}^2 - 2\overline{CM} \cdot \overline{MH} + \boxed{\text{(라)}}^2 \cdots \text{㉡}\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$ 이다.

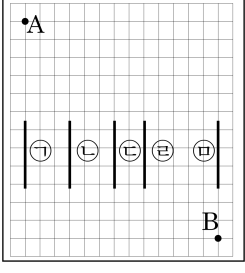
(가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- ① (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$
② (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$
③ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$
④ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$
⑤ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$

해설

생략

50. 다음 그림은 어느 운동장에 있는 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤ 5개의 평균대를 모눈종이에 나타낸 것이다. 동현이가 A 지점에서 출발하여 평균대 위를 걸어서 지나 B 지점까지 도착하는 경기를 하려 한다. 이동 거리를 가장 짧게 하려 할 때, 지나야 할 평균대는?

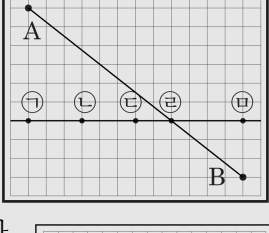


- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

- ④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

각 평균대의 한 끝점을 다른 한 끝점에 오도록 접으면 다음 그림과 같으므로 $\overline{AB}$ 위에 끝점이 있는 평균대 ㉣을 걸어서 지날 때 이동거리가 가장 짧다.



평행사변형의 성질을 이용하여 그림과 같이 B 지점에서 위로 4 칸 이동한 지점 B' 을 잡으면 이동 거리는 A 지점에서 B' 지점까지 이동한 후 B' 지점에서 B 지점까지 이동하는 거리와 같다. 이동 거리가 가장 짧은 것은 $\overline{AB'} + \overline{B'B}$ 이므로 $\overline{AB'}$ 위에 끝점이 있는 평균대 ㉣을 지나야 한다.

