**1.** 다음 등식이 $x$에 대한 항등식이 되도록 실수 $a, b, c$의 값을 구하여라.

$$ax^2 - x + c - 3 = 2x^2 - bx - 2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 1$

▷ 정답 : $c = 1$

해설

각 항의 계수를 서로 비교한다.

**2.** 등식 $2x^2+10x-18=a(x-2)(x+3)+bx(x-2)+cx(x+3)$ 이 $x$ 에 대한 항등식이 되도록 상수 $a, b, c$ 의 값을 정할 때, $a-b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

양변에 $x=0$ 을 대입하면,
$-18=-6a \quad \therefore\ a=3$
양변에 $x=2$ 를 대입하면
$10=10c \ \therefore\ c=1$
양변에 $x=-3$ 을 대입하면,
$-30=15b, \ \therefore\ b=-2$
$\therefore\ a-b+c=3+2+1=6$

**3.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}$ 을 만족하는 모든 실수 $x$, $y$에 대하여 항상 $ax+by+5=0$ 이다. 이때 $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=t$라 하면
$x=2t-1,\ y=3t+1$
이것을 $ax+by+5=0$에 대입하면
$a(2t-1)+b(3t+1)+5=0$
$(2a+3b)t+(-a+b+5)=0$
이 식이 모든 실수 $t$에 대하여 성립해야 하므로
$2a+3b=0\cdots$①
$-a+b+5=0\cdots$②
①, ②를 연립하여 풀면
$a=3,\ b=-2\quad\therefore\ a+b=3+(-2)=1$

해설

$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\Leftrightarrow AD=BC$ 성질 이용
$3x+3=2y-2$
$3x-2y+5=0$은 $ax+by+5=0$
$\therefore a=3,\ b=-2$

**4.** $(x+1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ 이 $x$에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$의 값을 구하면?

① 8 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 128

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면,
$(1+1)^5 = a_0 + a_1 + \cdots + a_5$ 이므로
$\therefore\ 2^5 = 32$

**5.** 다항식 $x^3+5x^2-kx-k$ 가 $x-1$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

인수정리에 의해서 $x=1$ 을 대입하면

$1^3+5\times1^2-k\times1-k=0$

$\therefore\ k=3$

**6.** $\dfrac{2x+1}{x^3-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$가 $x \neq 1$인 모든 실수 $x$에 대해 항상 성립 하도록 $a,\ b,\ c$를 구할 때, $a+b+c$의 값은?

① 2 ② $-2$ ③ 1 ④ $-1$ ⑤ 0

해설

우변의 분모를 통분하면

$$\frac{a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)}{x^3-1}$$

$$= \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$$

$$\therefore\ \frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$$

분자의 계수를 비교하면

$a+b=0,\ a-b+c=2,\ a-c=1$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1,\ c=0$

$\therefore a+b+c=0$

**7.** $f(x) = x^3-3x^2+3x+1$일 때, $f(x)-2 = x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$가 항상 성립하도록 하는 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

**해설**

$f(x)-2 = x^3-3x^2+3x-1$이므로
$x^3-3x^2+3x-1 = x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$
$= x^3+(-a+b)x^2+(a-1)x-b \cdots$ ㉠
㉠이 $x$에 대한 항등식이므로 양변의 차수가 같은 항의 계수가 같아야 한다.
즉, $-a+b=-3$, $a-1=3$, $b=1$
이므로 $a=4$, $b=1$
$\therefore\ a+b=5$

**8.** 임의의 $x$ 에 대하여 $x^3-1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 를 만족하는 상수 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 합 $a+b+c+d$ 의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

해설

양변에 $x=0$ 을 대입 하면
$-1=a+b+c+d$
$\therefore\ a+b+c+d=-1$

해설

$x^3-1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$
$=(x+1)\{a(x+1)^2+b(x+1)+c\}+d$
$=(x+1)[(x+1)\{a(x+1)+b\}+c]+d$ 이므로
$x^3-1$ 을 $x+1$ 로 연속으로 나눌 때
차례대로 나오는 나머지가 $d,\ c,\ b$가 되고 마지막 몫이 $a$ 이다.

$$
\begin{array}{r|rrrrll}
-1 & 1 & 0 & 0 & -1 & & \\
 & & -1 & 1 & -1 & & \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & \boxed{-2} & \leftarrow & \text{d} \\
 & & -1 & 2 & & & \\
\hline
-1 & 1 & -2 & \boxed{3} & \leftarrow & \text{c} & \\
 & & -1 & & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{-3} & \leftarrow \text{b} & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & \text{a} & & & & &
\end{array}
$$

**9.** 다음 등식이 $k$의 값에 관계없이 항상 성립할 때, $xy$의 값을 구하여라.

$$(2k+3)x+(3k-1)y+5k-9=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-6$

해설

$k$에 대하여 내림차순으로 정리하면
$(2x+3y+5)k+(3x-y-9)=0$
이것은 $k$에 대한 항등식이므로
$2x+3y+5=0$
$3x-y-9=0$
연립방정식을 풀면 $x=2,\ y=-3$
$\therefore\ xy=2\times(-3)=-6$

**10.** 다항식 $x^3+ax-8$을 $x^2+4x+b$로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$가 되도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-7$

해설

$x^3+ax-8$을 $x^2+4x+b$로 직접나눈 나머지는

$(a-b+16)x+4b-8$

$(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots$ ㉠

㉠이 $x$에 대한 항등식이므로,

$a-b+16=3,\ 4b-8=4$

$\therefore\ a=-10,\ b=3$

$\therefore\ a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10,\ b=3,\ p=-4$를 구해도 된다.

**11.** $x$에 관한 삼차식 $x^3+mx^2+nx+1$을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나누어떨어진다고 한다. 이 때, $-3(m+n)$의 값은?

① 4　② 8　③ 12　④ 14　⑤ 18

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+mx^2+nx+1 \\ &= (x+1)\,Q(x)+5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+mx^2+nx+1 \\ &= (x-2)\,Q'(x) \end{aligned}$$

$\therefore f(-1) = -1+m-n+1 = 5$

$f(2) = 8+4m+2n+1 = 0$

$\therefore m = \frac{1}{6},\ n = -\frac{29}{6}$

$\therefore m+n = -\frac{14}{3},\ -3(m+n) = 14$

**12.** $f(x) = x^2 - ax + 1$이 $x - 1$로 나누어 떨어질 때 상수 $a$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

해설

$f(1) = 1^2 - a \cdot 1 + 1 = 0$

$\therefore\ a = 2$

**13.** 등식 $2x^2-3x-1=a(x-1)(x-2)+bx(x-1)+cx(x-2)$이 $x$에 관한 항등식이 되도록 할 때, $a+b+c$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

수치대입법을 이용한다.

$x=0$ 대입, $a=-\frac{1}{2}$

$x=2$ 대입, $b=\frac{1}{2}$

$x=1$ 대입, $c=2$

$\therefore\ a+b+c=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2=2$

**14.** $k$ 의 값에 관계없이 $(2k^2 - 3k)x - (k+2)y - (k^2 - 4)z = 28$ 이 항상 성립하도록 $x, y, z$ 의 값을 정할 때, $3x + y + z$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

주어진 식을 $k$ 에 대해 정리하면

$(2x - z)k^2 - (3x + y)k - (2y - 4z + 28) = 0$

$\therefore\ 2x - z = 0, 3x + y = 0, 2y - 4z + 28 = 0$

$z = 2x,\ y = -3x$ 을 $2y - 4z + 28 = 0$ 에 대입하면

$x = 2,\ y = -6,\ z = 4$

$\therefore\ 3x + y + z = 4$

**15.** $k$의 값에 관계없이 $(3k^2+2k)x-(k+1)y-(k^2-1)z$의 값이 항상 1일 때, $x+y+z$의 값은?

① $-3$　② 0　③ 3　④ 6　⑤ 8

해설

주어진 식을 $k$에 대하여 정리하면
$k^2(3x-z)+k(2x-y)-(y-z)=1$
위 식이 $k$의 값에 관계없이 성립하므로 $k$에 대한 항등식이다.

$$\begin{cases} 3x-z=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ z-y=1 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$x=1,\ y=2,\ z=3$
$\therefore\ x+y+z=6$

**16.** $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$가 $x-y-1 \neq 0$인 어떤 $x$, $y$의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-4$

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}=k$라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

$x$, $y$에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 $x$, $y$에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0$, $a+k=0$, $-b+k=0$

$\therefore$ $k=2$, $a=-2$, $b=2$

$\therefore$ $a-b=-4$

**17.** $x-y=1$을 만족하는 임의의 실수 $x, y$에 대하여 $ax^2+bxy+cy^2-1=0$ 이 항상 성립할 때, $a+b+c$의 값은?

① $-2$　② $-1$　③ $0$　④ $1$　⑤ $2$

해설

$y=x-1$을 준식에 대입하여 $x$에 대한 내림차순으로 정리하면
$(a+b+c)x^2-(b+2c)x+c-1=0$
$x$에 대한 항등식이므로
$a+b+c=0,\ b+2c=0,\ c-1=0$
$\therefore\ a=1,\ b=-2,\ c=1$
$\therefore\ a+b+c=0$

**18.** 다항식 $2x^3+ax^2+x+b$가 $x^2-x+1$로 나누어떨어질 때, $a-b$의 값은?

① $-4$ ② $-2$ ③ $2$ ④ $3$ ⑤ $5$

해설

$2x^3+ax^2+x+b$
$=(x^2-x+1)(2x+c)$
$=2x^3+(c-2)x^2+(2-c)x+c$
$\therefore\ a=c-2,\ 1=2-c,\ b=c$
$c=1$ 이므로 $a=-1, b=1$
$\therefore\ a-b=-2$

**19.** 등식 $x^3+ax^2+2x+b=(x^2+x+1)Q(x)+2x+1$이 $x$에 대한 항등식일 때, $a+b$의 값은?

① $-2$　② $-1$　③ $0$　④ $1$　⑤ $2$

해설

$Q(x)=x+c$라고 두고 전개하여 계수를 비교하면
$a=0,\ b=0,\ c=-1$이므로 $a+b=0$

해설

$x^3+ax^2+2x+b$를 $x^2+x+1$로 직접 나눗셈을 하면,

$$
\begin{array}{r l}
 & x+(a-1) \\
x^2+x+1\,\big) & x^3+ax^2+\qquad 2x+b \\
- & x^3+\ x^2+\qquad\ \ x \\
\hline
 & (a-1)x^2+\qquad x+b \\
- & (a-1)x^2+(a-1)x+(a-1) \\
\hline
 & \qquad (2-a)x+b-a+1
\end{array}
$$

$2-a=2,\ b-a+1=1$
$a=0,\ b=0$

**20.** 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 할 때 $f(x)$를 $\frac{g(x)}{n}$로 나눈 몫과 나머지를 나타낸 것은?

① 몫 : $nQ(x)$, 나머지 $R(x)$
② 몫 : $\frac{Q(x)}{n}$, 나머지 $R(x)$
③ 몫 : $\frac{Q(x)}{n}$, 나머지 $\frac{R(x)}{n}$
④ 몫 : $Q(x)$, 나머지 $\frac{R(x)}{x}$
⑤ 몫 : $nQ(x)$, 나머지 $nR(x)$

해설

$f(x) = g(x)Q(x) + R(x) \cdots$ ㉠

$f(x) = \frac{g(x)}{n}Q'(x) + R'(x) \cdots$ ㉡

㉠ 에서 $f(x) = nQ(x)\frac{g(x)}{n} + R(x)$,

$\frac{Q'(x)}{n} = Q(x),\ R'(x) = R(x)$

$\therefore\ Q'(x) = n \cdot Q(x),\ R'(x) = R(x)$

**21.** 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$를 $x^2-1$로 나눈 나머지가 상수일 때, $f(x)$의 일차항의 계수는?

① $-1$　　② $0$　　③ $1$　　④ $2$　　⑤ $-2$

해설

$f(x)=(x^2-1)(x+a)+r$ ($a,\ r$는 상수)라 하면

$f(x)=x^3+ax^2-x-a+r$

$\therefore$ 일차항의 계수는 $-1$

**22.** $x^3 - 4x^2 + ax + b$를 $(x+1)^2$ 으로 나누면 나머지가 7이 될 때, $a+b$의 값은?

① $-12$　② $-10$　③ $0$　④ $10$　⑤ $12$

해설

직접 나눠본다.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-6 \\
x^2+2x+1 & x^3-4x^2+\quad ax+b \\
- & x^3+2x^2+\quad x \\
\hline
 & -6x^2+(a-1)x+b \\
- & -6x^2-\quad 12x-6 \\
\hline
 & (a+11)x+b+6
\end{array}
$$

나머지가 7이므로 $a+11=0,\ b+6=7$

$\therefore\ a=-11,\ b=1$

$\therefore\ a+b=-10$

해설

$x^3 - 4x^2 + ax + b$

$= (x+1)^2(x+k) + 7$

$= x^3 + (k+2)x^2 + (2k+1)x + k + 7$

계수를 비교하면

$k+2=-4, 2k+1=a, k+7=b$

$k=-6$이므로 $a=-11, b=1$

$\therefore a+b=-10$

**23.** 임의의 실수 $x$ 대하여 $(1+2x-x^2)^{10} = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{20}x^{20}$ 이 항상 성립할 때, $2a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{20}$ 의 값은?

① 1023 ② 1024 ③ 1025 ④ 2046 ⑤ 2050

해설

$x=0$ 대입, $a_0=1$

$x=1$ 대입, $2^{10}=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}$

$2a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{20}=1+1024=1025$

**24.** 등식 $2x^2 + x + 5 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$가 $x$에 대한 항등식일 때 $a+b+c$의 값은?

① 12　② 15　③ 18　④ 21　⑤ 24

**해설**

좌변을 전개하여 계수를 비교해서 $a, b, c$를 구할 수 있다.
여기에서는 계수의 합을 구하는 것이므로 양변에 $x = 2$를 대입해서 구한다.
$15 = a + b + c$

**25.** $x^3$ 의 계수가 1 인 삼차다항식 $f(x)$ 가 $x-1$ 을 인수로 갖고, $x^2+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 $x+5$ 이다. 이 때, $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는?

① $-1$ ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

$x^3$ 의 계수가 1 이므로
$f(x)=(x^2+2)(x+\alpha)+x+5\cdots$①
$x-1$ 의 인수를 가지므로, $f(1)=0$
① 에 넣어 계산하면,
$f(1)=3(1+\alpha)+6=0,\ \alpha=-3$
$\therefore\ f(2)=(2^2+2)(2-3)+2+5=1$