

1. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때, 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x) \leq x$ 를 만족한다. 이 때, 함수 f 의 개수는?

① 16 개

② 20 개

③ 24 개

④ 28 개

⑤ 32 개

해설

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1 의 1 개 $\Leftarrow f(1) \leq 1$

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1, 2 의 2 개 $\Leftarrow f(2) \leq 2$

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1, 2, 3 의 3개 $\Leftarrow f(3) \leq 3$

$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1, 2, 3, 4 의 4개 $\Leftarrow f(4) \leq 4$

따라서, 구하는 함수 f 의 개수는

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (개)

2. 일차 이하의 다항함수 $y = f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

I. $f(0) \leq f(1)$

II. $f(2) \geq f(3)$

III. $f(1) = 1$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

< 보기 >

㉠ $f(2) = 1$

㉡ $f(3) = 3f(1)$

㉢ $f(-1) > f(1)$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

일차 이하의 다항함수 중

조건 I, II를 만족하는 함수는

상수함수이므로 조건 III에 의하여 $f(x) = 1$ 이다.

따라서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

3. 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2 개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은

$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$,

$\{3, 4\}$ 로 6 개이다.

정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인 함수의 개수는 $2^3 = 8$ 인데

이 중에서 치역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8 - 2 = 6$ 따라서 $6 \times 6 = 36$ 개

4. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

① 12 개

② 20 개

③ 25 개

④ 27 개

⑤ 30 개

해설

$f(-1) = f(1), f(0) = f(0)$ 이므로

A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지

A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지

$\therefore 5 \times 5 = 25$ (가지)

5. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에서 집합 $B = \{3, 4, 5, 6\}$ 로의 함수 f 가 일대일 함수이다. f 중에서 임의의 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 인 것의 개수는?

① 14 개

② 18 개

③ 20 개

④ 24 개

⑤ 27 개

해설

일대일 대응 함수는

$f(1)$: 4 가지

$f(2)$: 3 가지

$f(3)$: 2 가지

$\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$ (가지)

그런데 $f(3) = 3$ 인 것이 6 가지 이므로

$f(x) \neq x$ 인 것은

$\therefore 24 - 6 = 18$ (가지)

6. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여

I. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

II. $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$

① 2 개

② 4 개

③ 6 개

④ 8 개

⑤ 12 개

해설

조건 I에서, $x_1 = 0, x_2 = 0$ 이면

$$f(0) = f(0) + f(0) \text{ 에서 } f(0) = 0$$

$x_1 = 1, x_2 = -1$ 이면

$$f(0) = f(1) + f(-1) \text{ 에서, } f(-1) = -f(1)$$

이때, 조건 II에 의해

$$f(1) \neq 0, f(-1) \neq 0$$

따라서, 두 조건을 만족시키는

함수 f 의 개수는 0이 대응할 수 있는

원소는 0의 1가지,

1이 대응할 수 있는 원소는

-2, -1, 1, 2의 4가지,

-1이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1가지,

따라서, $1 \times 4 \times 1 = 4$ (개)

7. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b\}$ 일 때, 함수 $f : A \rightarrow B$ 중에서 치역이 공역과 일치하는 것은 몇 개인가?

① 7개

② 10개

③ 12개

④ 14개

⑤ 24개

해설

A 의 원소 1, 2, 3, 4를 두 개의 조로 나눈 다음,
 B 의 원소 a, b 에 분배하는 방법을 생각해 보면
두 개의 조로 나누는 방법은 (1개, 3개)로 나누는 방법과 (2개, 2개)로 나누는 방법이 있으므로

$${}_4C_1 \times {}_3C_3 \times 2! + {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \times 2! = 8 + 6 = 14(\text{개})$$

8. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{2, 4, 6, 8\}$ 에 대하여 치역과 공역이 일치하는 X 에서 Y 로의 함수의 개수는?

① 120 개

② 180 개

③ 240 개

④ 300 개

⑤ 360 개

해설

정의역의 원소 5개 중 2개는 같은 함수값을 가진다.

집합 X 의 원소 중 같은 함수값을 갖는 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_5C_2 = 10$$

택한 2개의 원소를 하나로 생각하여 집합 X 의 원소 4개를 집합 Y 의 각 원소에 대응시키는 방법의 수는 $4! = 24$

따라서 구하는 함수의 개수는 $10 \times 24 = 240(\text{개})$

9. 6 명의 학생에게 쪽지시험을 보게 한 후 답안지를 서로 바꾸어서 채점을 하게 하였다. 6 명 모두 자신의 답안지를 가지지 않게 바꿀 수 있는 방법은 몇 가지인가?

① 44

② 60

③ 108

④ 126

⑤ 265

해설

6 명의 답안지를 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 로 놓는다.

i 가 가진 답안지를 $f(i)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) 로 놓으면

$(1 - f(1))(2 - f(2))(3 - f(3))(4 - f(4))(5 - f(5))(6 - f(6)) \neq 0$ 인 일대일대응

$f: A \rightarrow A$ 의 개수를 구하는 것이다.

$A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 일 때,

위의 조건을 만족하는 함수 f 의 개수를 a_n 이라 하면 $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ $f(1) = 2$ 인 경우

다음 두 가지 경우를 생각할 수 있다.

(i) $f(2) = 1$ 인 경우 : 이때, f 의 개수는 $3, 4, \dots, n$ 은 모두 겹치지 않게 배열하는 방법 이므로 그 수는 a_{n-2} 이다.

(ii) $f(2) \neq 1$ 인 경우 : $f(2)$ 는 $3, 4, \dots, n$ 의 값이 될 수 있고, 1 은 $f(3), f(4), \dots, f(n)$ 의 함수값이므로 1 은 2 로 바뀌어도 상관없다. 즉, $2, 3, \dots, n$ 은 모두 겹치지 않게 배열하는 가지수이므로 그 수는 a_{n-1} 이다.

(i)(ii)에서 $f(1) = 2$ 인 경우 f 의 가짓수는 $a_{n-1} + a_{n-2}$ 이고, $f(1) = 3, 4, \dots, n$ 인 경우에도 마찬가지로 구하는 a_n 은 다음식을 만족한다.

$$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$$

$$\text{따라서, } a_3 = 2(1 + 0) = 2,$$

$$a_4 = 3(2 + 1) = 9,$$

$$a_5 = 4(9 + 2) = 44,$$

$$a_6 = 5(44 + 9) = 265$$

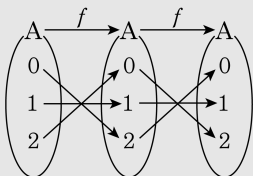
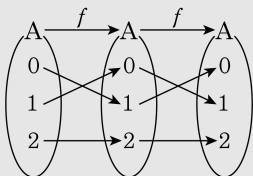
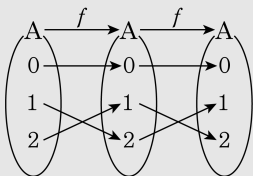
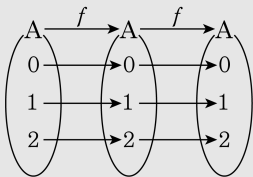
10. 임의의 자연수를 3 으로 나누었을 때, 나머지의 집합 A 에서 A 로의 함수 f 중 합성함수 $f \circ f$ 가 항등함수가 되는 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

개

▶ 정답 : 4개

해설



11. 두 집합 $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 다음 두 조건을 만족하는 함수 f 의 개수를 구하여라.

- (i) $f : X \rightarrow Y$ 는 일대일 함수
(ii) $x \neq y$ 인 X 의 원소 x, y 에 대해
 $f(xy) = f(x)f(y)$

▶ 답 :

개

▶ 정답 : 4개

해설

조건 (ii)에서 나타날 수 있는 경우는

$$f(0 \cdot 1) = f(0) = f(0) \cdot f(1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(0 \cdot 2) = f(0) = f(0) \cdot f(2) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$f(1 \cdot 2) = f(2) = f(1) \cdot f(2) \quad \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $f(0) \{f(1) - f(2)\} = 0$ 이고

조건 (i)로 부터 $f(0) = 0$ 이고

$$\textcircled{3} \text{에서 } f(2) \{f(1) - 1\} = 0$$

$f(2) \neq 0$ 이므로 $f(1) = 1$, $f(2) = 2, 3, 4, 5$ 가 될 수 있으므로
함수의 개수는 4 개

12. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에서 A 로의 함수 f 중에서 $2x - f(x) \in A (x = 1, 2, 3)$ 이 성립하는 것의 개수는?

- ① 3 개 ② 5 개 ③ 9 개 ④ 18 개 ⑤ 24 개

해설

$$2x - f(x) \in A \text{ 이면, } x = 1 \Rightarrow 2 - f(1) \in A$$

$$\therefore f(1) = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow 4 - f(2) \in A$$

$$\therefore f(2) = 1, f(2) = 2, f(2) = 3$$

$$x = 3 \Rightarrow 6 - f(3) \in A$$

$$\therefore f(3) = 3$$

따라서 주어진 조건을 만족하는 f 의 개수는 3 개

13. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 A 에서 A 로의 함수 f 의 개수는?

㉠ 함수 f 는 일대일대응이다.

㉡ $f(1) = 5$ 이다.

㉢ $a \geq 2$ 이면 $f(a) \leq a$ 이다.

① 4

② 8

③ 16

④ 32

⑤ 64

해설

조건 ㉢에 의해 $f(2) \leq 2$ 이므로 $f(2)$ 를 정하는 방법의 수는 ${}_2C_1$
조건 ㉠, ㉢에 의해 $f(3) \leq 3, f(3) \neq f(2)$ 이므로 $f(3)$ 를 정하는
방법의 수는 ${}_2C_1$

같은 방법으로 $f(4)$ 를 정하는 방법의 수도 ${}_2C_1$ 이고, $f(5)$ 를
정하는 방법의 수는 1

$$\therefore {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 = 8$$