

1. 다항식 $f(x)$ 를 다항식 $g(x)$ 로 나눈 나머지를 $r(x)$ 라 할 때, $f(x) - g(x) - 2r(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 나머지는?

① $-2r(x)$

② $-r(x)$

③ 0

④ $r(x)$

⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x) = g(x)Q(x) + r(x)$$

$$\therefore f(x) - g(x) - 2r(x)$$

$$= g(x)Q(x) + r(x) - g(x) - 2r(x)$$

$$= g(x)\{Q(x) - 1\} - r(x)$$

여기서 $g(x)$ 의 차수는 $-r(x)$ 의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$ 이다.

2. 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 1$ 로 나눈 나머지가 상수일 때, $f(x)$ 의 일차항의 계수는?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$f(x) = (x^2 - 1)(x + a) + r \quad (a, r \text{ 는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 - x - a + r$$

$\therefore$ 일차항의 계수는 -1

3. 실수가 아닌 복소수 z 에 대하여 $\frac{z}{1+z^2}$ 가 실수이기 위한 조건은?
(단, $z \neq \pm i$ 이고 $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

- ① $z \cdot \bar{z} = 1$
- ② $z + \bar{z} = 0$
- ③ $z + \bar{z} = 1$
- ④ $z + \bar{z} = -1$
- ⑤ $(z + 1)(\bar{z} + 1) = 1$

해설

$\frac{z}{1+z^2}$ 가 실수이면

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$$\frac{z}{1+z^2} - \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2} = 0$$

$$\frac{z(1+\bar{z}^2) - \bar{z}(1+z^2)}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\bar{z}) - z\bar{z}(z-\bar{z})}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\bar{z})(1-z\bar{z})}{(1+z)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

(분모) $\neq 0$ 이므로

$$(\text{분자}) = (z-\bar{z})(1-z\bar{z}) = 0$$

z 가 실수가 아니므로 $z \neq \bar{z}$

$$\therefore z\bar{z} = 1$$

4. $z = \frac{1-i}{1+i}$ 일 때, $z^{100} + \frac{1}{z^{100}}$ 의 값을 구하여라. ($i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z = \frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$z^{100} + \frac{1}{z^{100}} = (-i)^{100} + \frac{1}{(-i)^{100}} = 1 + 1 = 2$$

5. 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{-2} - \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$ 을 간단히 하여 $a + bi$ 의 꼴로 나타낼 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{-3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{-2} - \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}} \\ &= (\sqrt{-3} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{-2}) - \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}} \\ &= \sqrt{-6} \times \sqrt{-6} - \sqrt{-2} - \sqrt{-2} \\ &= -\sqrt{36} - \sqrt{2}i - \sqrt{2}i = -6 - 2\sqrt{2}i \\ \therefore ab &= 12\sqrt{2} \end{aligned}$$

6. x 의 이차방정식 $x^2 - (2a + 2 + m)x + a^2 + 4a - n = 0$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 상수 m, n 을 정할 때, $m + n$ 의 값은?

① -3

② -2

③ 1

④ 3

⑤ 4

해설

$$D = (2a + 2 + m)^2 - 4(a^2 + 4a - n) = 0$$

이 등식을 a 에 관하여 정리하면

$$4a(m - 2) + m^2 + 4m + 4n + 4 = 0$$

이 등식이 a 에 관계없이 항상 성립하려면

$$4(m - 2) = 0, m^2 + 4m + 4n + 4 = 0$$

$$\therefore m = 2, n = -4 \quad \therefore m + n = -2$$

7. 이차방정식 $x^2 + 3x - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha^4 + \beta^4$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 161

해설

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= -3, \alpha\beta = -2 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 13 \\ \alpha^4 + \beta^4 &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 \\ &= (13)^2 - 2\alpha^2\beta^2 \\ &= (13)^2 - 2(-2)^2 = 161\end{aligned}$$

8. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 2, 곱이 3일 때, 이차방정식 $f(2x+1) = 0$ 의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0$ 이고 조건에서

$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$

$f(2x+1) = 0$ 에서

$2x+1 = \alpha$ 또는 $2x+1 = \beta$

$\therefore x = \frac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x = \frac{\beta-1}{2}$

따라서 $f(2x+1) = 0$ 의 근은 $\frac{\alpha-1}{2}, \frac{\beta-1}{2}$

이때 두 근의 합 $\frac{\alpha-1}{2} + \frac{\beta-1}{2}$

$= \frac{\alpha+\beta-2}{2} = \frac{2-2}{2} = 0$

9. 실계수 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + i$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ -1 ④ -2 ⑤ 4

해설

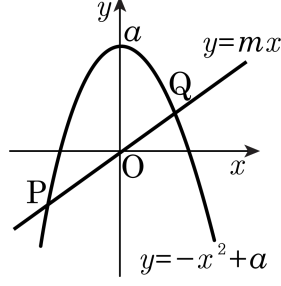
실계수 방정식에서 $2 + i$ 가 근이면 $2 - i$ 도 근이다.

따라서 두 근의 합 $-a = 4 \quad \therefore a = -4$

두 근의 곱 $b = 5$

$a + b = 1$

10. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = -x^2 + a$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ 가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5} - 1$ 일 때, $a + m$ 의 값을 구하여라. (단, a, m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = -x^2 + a$ 와 $y = mx$ 가 만나는 두 점 P, Q의 x 좌표는 방정식이 $-x^2 + a = mx$ 의 근이다.

점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5} - 1$ 이므로

방정식 $x^2 + mx - a = 0$ 의 한 근이 $\sqrt{5} - 1$ 이다.

그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5} - 1$ 이다.

따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-m = (\sqrt{5} - 1) + (-\sqrt{5} - 1) = -2$$

$$-a = (\sqrt{5} - 1)(-\sqrt{5} - 1) = -4$$

$$\therefore a = 4, m = 2 \quad \therefore a + m = 6$$

11. 차가 5 인 두 수 중에서 그 곱이 최소가 되는 두 수는? .

① $-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}$

② 3, 4

③ 2, 5

④ -1, 5

⑤ $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$

해설

두 수를 각각 x , $x+5$ 라 하면

$$y = x(x+5) = x^2 + 5x = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

최소가 되는 x 의 값은 $-\frac{5}{2}$ 이므로

$x+5$ 의 값은 $\frac{5}{2}$

12. 이차함수 $y = -2x^2 + 4ax - a^2 - 6a + 6$ 의 최댓값을 m 이라고 할 때, m 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 4ax - a^2 - 6a + 6 \\ &= -2(x-a)^2 + a^2 - 6a + 6 \end{aligned}$$

$$\text{최댓값 } m = a^2 - 6a + 6 = (a-3)^2 - 3$$

$$\therefore m \text{ 의 최솟값 : } -3$$

13. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x + a$ 와 $g(x) = -x^2 - 2x + 1$ 이 있다. 임의의 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) > g(x_2)$ 일 때, 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $a > 6$ ② $a > 5$ ③ $a > 4$ ④ $a > 3$ ⑤ $a > 2$

해설

$$f(x) = x^2 - 4x + a = (x - 2)^2 + a - 4 \text{ 에서}$$

$f(x)$ 의 최솟값은 $a - 4$,

$$g(x) = -x^2 - 2x + 1$$

$$= -(x + 1)^2 + 2 \text{ 에서}$$

$g(x)$ 의 최댓값은 2

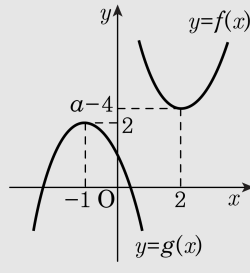
한편, 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여

$f(x_1) > g(x_2)$ 이면 오른쪽 그림과 같이

$f(x)$ 의 최솟값이 $g(x)$ 의 최댓값보다

커야하므로

$$a - 4 > 2 \quad \therefore a > 6$$



14. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \leq 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \leq 5$ 이 되도록 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

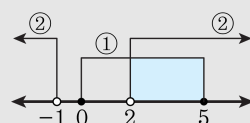
해설

첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x - 5) \leq 0$
 $\therefore 0 \leq x \leq 5 \dots\dots ①$

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \dots\dots ②$

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \leq 5$ 이므로 a 의 값은 2이다.



15. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c) + (c+a)(c-a)$ 가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① 직각삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 정삼각형
④ 예각삼각형 ⑤ 둔각삼각형

해설

$(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c) + (c+a)(c-a)$ 에서
 $\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\} = b^2 + 2bc + c^2 - a^2$
 $a^2 - (b-c)^2 = -a^2 + b^2 + c^2 + 2bc$
 $2a^2 = 2b^2 + 2c^2$
 $\therefore a^2 = b^2 + c^2$
따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

16. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나누면 $3x + 2$ 가 남고, 그 몫을 $x - 1$ 로 나누면 2가 남는다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $x^3 - 1$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $\frac{1}{2}R(2)$ 의 값을 구하면?

① 41 ② 31 ③ 21 ④ 11 ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + x + 1)Q(x) + 3x + 2 \\ &= (x^2 + x + 1)((x - 1)p(x) + 2) + 3x + 2 \\ &= (x^3 - 1)p(x) + 2x^2 + 5x + 4 \\ \therefore R(x) &= 2x^2 + 5x + 4 \\ \therefore \frac{1}{2}R(2) &= 11 \end{aligned}$$

17. $a-b=1+i$, $b-c=1-i$ 일 때, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 의 값은?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

$a-b=1+i \cdots \cdots \textcircled{A}$

$b-c=1-i \cdots \cdots \textcircled{B}$

$\textcircled{A}+\textcircled{B}$ 을 계산하면 $a-c=2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$

$=\frac{1}{2}((1+i)^2+(1-i)^2+(-2)^2)$

$=\frac{1}{2}(1+2i-1+1-2i-1+4)$

$=2$

18. 둘레의 길이가 48cm 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되도록 하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 순서대로 써라.

▶ 답: cm

▶ 답: cm

▶ 정답 : 12cm

▶ 정답 : 12cm

해설

가로, 세로의 길이를 각각 x cm, $(24 - x)$ cm 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(24 - x) \\ &= -x^2 + 24x \\ &= -(x - 12)^2 + 144 \end{aligned}$$

$x = 12$ 일 때, 최댓값 144를 갖는다.

$$\therefore x = 12, 24 - x = 12$$

따라서 가로 길이는 12 cm, 세로 길이도 12 cm

19. 어떤 수공예 업자가 만든 수공예품의 원가는 15000 원이다. 시장 조사를 하더니 정가를 25000 원으로 하면 하루에 200 개를 팔 수 있고, 500원씩 정가를 내릴 때마다 20개씩 더 팔 수 있다고 한다. 최대 이윤을 얻으려면 정가를 얼마로 해야 하는가?

- ① 22500 원 ② 23000 원 ③ 23500 원
④ 24000 원 ⑤ 24500 원

해설

한 개의 이윤을 x 원이라 하면

팔리는 제품의 개수는

$$200 + \frac{10000 - x}{500} \times 20 = 600 - \frac{x}{25}$$

총 이윤을 p 라 하면

$$p = x \left(600 - \frac{x}{25} \right) = -\frac{x^2}{25} + 600x$$

$$= -\frac{1}{25}(x^2 - 15000x)$$

$$= -\frac{1}{25}(x - 7500)^2 + 2250000$$

따라서 한 개의 이윤이 7500 원일 때,

최대 이윤을 얻을 수 있으므로 정가는

$$15000 + 7500 = 22500(\text{원})$$

20. 두 이차방정식 $x^2 + kx + 3 = 0$, $x^2 + x + 3k = 0$ 이 공통인 실근 α 를 가질 때, $\alpha - k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

공통근이 α 이므로
 $\alpha^2 + k\alpha + 3 = 0 \dots\dots\textcircled{1}$
 $\alpha^2 + \alpha + 3k = 0 \dots\dots\textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 에서 $(k - 1)\alpha - 3(k - 1) = 0$,
 $(k - 1)(\alpha - 3) = 0$
(i) $k = 1$ 인 경우 두 이차방정식이 $x^2 + x + 3 = 0$ 으로 일치하여
공통근은 갖지만 실근이 아니므로 부적합하다.
(ii) $\alpha = 3$ 인 경우 $9 + 3k + 3 = 0 \therefore k = -4$
 $\therefore \alpha - k = 7$

21. x, y 가 정수일 때 방정식 $xy - x - 2y - 2 = 0$ 을 만족하는 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 6개

해설

$$xy - x - 2y - 2 + 4 = 4$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{factored out}}}{x(y-1)} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{factored out}}}{2(y-1)} = (x-2)(y-1) = 4$$

따라서

$x - 2 = 1, y - 1 = 4$ 일 때, $x = 3, y = 5$

$x - 2 = 2, y - 1 = 2$ 일 때, $x = 4, y = 3$

$x - 2 = 4, y - 1 = 1$ 일 때, $x = 6, y = 2$

$$x - 2 = -1, y - 1 = -4 \text{ 일 때, } x = 1, y = -3$$

$$x-2=4, y-1=-1 \text{ 일 때, } x=6, y=0$$

$x - 2 = 4, y - 1 = -1$ 일 때, $x = 6, y =$
 $x - 2 = 1, y - 1 = 4$ 일 때 $x = 3, y = 5$

따라서 스터싸으 (2, 5), (4, 2), (6, 2), (1, 2)

따라서 순서쌍은 $(3, 5), (4, 3),$
 $(5, 5), (5, 7)$ 의 모든 6개이다.

22. 연립부등식 $\begin{cases} 1 < x + 5y < 5 \\ -2 < 2x + 7y < 3 \end{cases}$ 을 성립시키는 정수로 이루어진

순서쌍 (x, y) 중 $x + y$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M + 2m$ 의 값을 구하면?

- ① -9 ② -13 ③ -18 ④ -22 ⑤ -26

해설

$1 < x + 5y < 5 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $-2 < 2x + 7y < 3 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠} \times (-2) + \textcircled{㉡}$ 을 하면
 $-10 < -2x - 10y < -2 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $-2 < 2x + 7y < 3 \cdots \cdots \textcircled{㉣}$
 $\textcircled{㉢} + \textcircled{㉣} = -12 < -3 < 1$
그러므로, $-\frac{1}{3} < y < 4$
그런데, y 는 정수이므로 $y = 0, 1, 2, 3$
이것을 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에 대입하여 적합한 x 의 값을 구하면
 $(x, y) = (-3, 1), (-6, 2), (-7, 2), (-11, 3)$
따라서, $x + y$ 의 최댓값은 $-3 + 1 = -2$ 이고,
최솟값은 $-11 + 3 = -8$ 이다.
 $\therefore M = -2, m = -8 \therefore M + 2m = -18$

23. x 에 관한 부등식 $(a+2b)x+a-b < 0$ 의 해가 $x > 1$ 일 때, x 에 관한 부등식 $(a-b)x+2a-b > 0$ 을 풀면?

① $x > \frac{1}{3}$
④ $x < -\frac{4}{3}$

② $x < \frac{1}{3}$
⑤ $x > \frac{7}{3}$

③ $x > -\frac{4}{3}$

해설

$$a+2b < 0, \frac{-(a-b)}{a+2b} = 1$$

$\therefore b = -2a$ 이므로

$$(a-b)x+2a-b = a(3x+4) > 0$$

$a > 0$ 을 이용하면

$$\therefore 3x+4 > 0 \therefore x > -\frac{4}{3}$$