

1. $O(0, 0)$, $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ 일 때, 평행사변형 $OABC$ 의 넓이를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

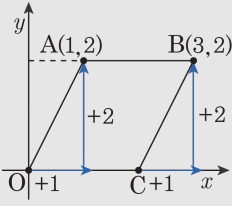
$\overline{OA} \parallel \overline{CB}$, $\overline{OA} = \overline{CB}$ 이

점 A는 점 O를 x 축 방향으로 1만큼, y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로
점 B도 점 C를 x 축 방향으로 1만큼, y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore C = (2, 0)$

따라서 밑변이 2, 높이가 2이므로

(넓이) $= 2 \times 2 = 4$



2. 원점 O와 두 정점 A(2, 3), B(4, 0)에 대하여 $\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 을 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

② $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 29 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 29 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 29 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 + 12x + 6y + 29 = 0$

해설

P의 좌표를 P(x, y)라 하면

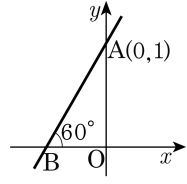
$\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 이므로

$$x^2 + y^2$$

$$= \{(x-2)^2 + (y-3)^2\} + \{(x-4)^2 + y^2\}$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$$

3. 다음 그림과 같이 점 A(0, 1) 을 지나는 직선 l 이 x 축의 양의 방향과 60° 를 이루고 x 축과 점 B 에서 만날 때, 점 B 의 좌표는?



- ① $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ② $(-1, 0)$ ③ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
 ④ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

해설

직선 l 이 x 축의 양의 방향과 60° 를 이루므로
 직선 l 의 기울기는 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$
 또한 직선 l 은 점 A(0, 1) 을 지나므로
 $y - 1 = \sqrt{3}(x - 0)$
 $\therefore y = \sqrt{3}x + 1$
 이 직선이 x 축과 만나는 점 B 는 y 좌표가 0 이므로
 $0 = \sqrt{3}x + 1$
 $\therefore x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
 $\therefore B\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$

4. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1, 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 2$

5. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$, $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$ 가 일직선 위에 있을 때, k 의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2 + 7k + 12 = 0$

$\therefore k$ 의 값의 곱은 12이다.

6. 직선 $x + ay + 1 = 0$ 이 직선 $2x + by + 1 = 0$ 에 수직이고 직선 $x - (b - 1)y - 1 = 0$ 과 평행할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

두 직선 $x + ay + 1 = 0, 2x + by + 1 = 0$ 이 서로 수직이므로
 $1 \cdot 2 + a \cdot b = 0 \quad \therefore ab = -2 \cdots \textcircled{\small{\text{㉠}}}$
두 직선 $x + ay + 1 = 0, x - (b - 1)y - 1 = 0$ 이 서로 평행하므로
 $\frac{1}{1} = \frac{a}{1 - b} \neq \frac{1}{-1} \quad \therefore a + b = 1 \cdots \textcircled{\small{\text{㉡}}}$
 $\textcircled{\small{\text{㉠}}}, \textcircled{\small{\text{㉡}}}$ 에서 $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
 $\therefore 1 - 2 \cdot (-2) = 5$

7. 좌표평면 위에 마름모 ABCD 가 있다. 두 점 A, C 의 좌표가 각각 $(-2, 1)$, $(4, -2)$ 일 때, 두 점 B, D 를 지나는 직선의 방정식은?

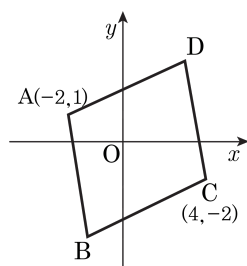
① $y = x - 2$

② $y = x - \frac{5}{2}$

③ $y = 2x - \frac{3}{2}$

④ $y = 2x - 2$

⑤ $y = 2x - \frac{5}{2}$



해설

마름모의 두 대각선은 서로를 수직 이등분하므로 $\overline{BD}$ 는 $\overline{AC}$ 와 수직이고 두 점 A, C 의 중점을 지난다.

$\overline{AC}$ 의 기울기는 $\frac{1 - (-2)}{-2 - 4} = -\frac{1}{2}$,

중점은 $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

두 점 B, D 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = 2(x - 1) - \frac{1}{2} = 2x - \frac{5}{2}$$

8. 두 직선 $x-y+3=0$, $2x-y=0$ 의 교점을 지나고 점 $(1, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

- ① $3x-y-3=0$ ② $3x+y+3=0$ ③ $3x-y+3=0$
④ $x+3y+3=0$ ⑤ $3x+y-3=0$

해설

두 직선의 교점을 연립방정식을 풀어 계산하면
교점은 $(3, 6)$, $(1, 0)$ 을 지나므로 직선의 방정식은

$$y = \frac{6-0}{3-1}(x-1)$$

$$\therefore y = 3x - 3$$

9. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $P(a, b)$ 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k 에 관하여 정리하면

$$(x+2)k^2 + (x^2+x-2)k + (1-y) = 0$$

k 에 관한 항등식이므로

$$x+2=0, x^2+x-2=0, 1-y=0$$

$$\therefore x=-2, y=1$$

$$\therefore \text{구하는 점의 좌표는 } (-2, 1)$$

$$\therefore a=-2, b=+1$$

$$\therefore a+b=-1$$

10. $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 1 = 0$ 에 이르는 거리가 같은 x 축 위의 점의 좌표를 구하면?

- ① $(-2, 0)$, $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ ② $(-2, 0)$, $(2, 0)$
③ $(0, -2)$, $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ ④ $(0, -2)$, $(0, 2)$
⑤ $(-2, 0)$, $(0, 0)$

해설

x 축 위의 점을 $(\alpha, 0)$ 이라 하자.

점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하면,

$$\frac{|\alpha - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|2\alpha - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$\Rightarrow |\alpha - 3| = |2\alpha - 1|$$

$$\Rightarrow (\alpha - 3)^2 = (2\alpha - 1)^2$$

$$\Rightarrow 3\alpha^2 + 2\alpha - 8 = 0$$

$$\alpha = \frac{4}{3} \text{ 또는 } -2$$

$$\therefore \left(\frac{4}{3}, 0\right), (-2, 0)$$

11. 다음 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하시오.

$3x - y - 6 = 0 \text{ , } \quad 3x - y + k = 0$

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

해설

직선 $3x - y - 6 = 0$ 위의 한 점 $(2, 0)$ 에서 직선

$3x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|3 \times 2 - 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|6 + k|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|6 + k| = 10$$

따라서 $k = 4$ ($\because k$ 는 양수)

12. 점 $(1, 1)$ 을 지나고, x 축과 y 축을 동시에 접하는 원은 두 개 존재한다.
이 때, 두 원의 중심거리는 얼마인가?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{6}$ ⑤ 4

해설

x 축, y 축 동시에 접하는 원 :

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$$

$$(1,1) \text{ 을 지나므로, } (1-a)^2 + (1-a)^2 = a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 2 = 0$$

두 근을 α, β 라 하면,

$$\alpha + \beta = 4, \quad \alpha\beta = 2$$

두 원의 중심거리 :

$$\begin{aligned}\sqrt{(\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2} &= \sqrt{2\{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\}} \\ &= \sqrt{2(4^2 - 8)} = 4\end{aligned}$$

13. 직선 $ax + by + c = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니 직선 $3x - 4y + 2 = 0$ 과 수직이 되었다. 이 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $\frac{8a}{3b}$ 의 값은?(단, $ab \neq 0$)

① $-\frac{32}{9}$

② -2

③ 2

④ 4

⑤ $\frac{32}{9}$

해설

$y = x$ 대칭시키면 직선은

$$bx + ay + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a},$$

$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ 과 수직이 되려면,

$\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ 가 되어야 한다.

$$\therefore \frac{8a}{3b} = \frac{8}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right) = 2$$

14. 점 $(1, -2)$ 를 지나는 직선을 점 $(2, 3)$ 에 대하여 대칭이동한 후 x 축에 대하여 대칭이동 하였더니 점 $(4, -4)$ 를 지난다고 한다. 처음 직선의 방정식을 구하면?

- ㉠ $y = -4x + 2$ ㉡ $y = 4x + 2$ ㉢ $y = -4x + 4$
㉣ $y = 4x + 4$ ㉤ $y = -4x + 6$

해설

$(1, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식을
 $y + 2 = m(x - 1) \cdots \textcircled{1}$ 이라 하면
㉠식을 점 $(2, 3)$ 에 대칭이동하면 (중점공식이용)
 $x \rightarrow 4 - x \quad y \rightarrow 6 - y$ 이므로
 $6 - y + 2 = m(4 - x - 1), y = m(x - 3) + 8 \cdots \textcircled{2}$
직선 ㉡를 x 축에 대칭이동하면
 $-y = m(x - 3) + 8 \cdots \textcircled{3}$
직선 ㉢이 점 $(4, -4)$ 를 지나므로
 $4 = m(4 - 3) + 8 \therefore m = -4$
따라서 처음 직선의 방정식 ㉠은
 $y + 2 = -4(x - 1), y = -4x + 2$

15. 점(4, 3)을 $y = 2x$ 에 대칭이동한 점의 좌표는?

① (0, 5)

② (0, 1)

③ (-1, 2)

④ (0, -5)

⑤ (-1, -2)

해설

점 P(4, 3)을 직선 $y = 2x$ 에 대칭 이동한 점을 $Q(\alpha, \beta)$ 라 할 때 직선 PQ가 $y = 2x$ 에 수직이므로 직선 PQ의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

$$\frac{\beta - 3}{\alpha - 4} = -\frac{1}{2} \dots \textcircled{㉠}$$

점 P, Q의 중점 $\left(\frac{\alpha + 4}{2}, \frac{\beta + 3}{2}\right)$ 이

직선 $y = 2x$ 위에 있으므로

$$\frac{\beta + 3}{2} = 2 \times \frac{\alpha + 4}{2} \dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$\alpha = 0, \beta = 5$$

따라서 (0, 5)이다.

16. 좌표평면에서 세 점 A(-1, 1), B(2, 2), C(6, 0)에 대하여 △ABC의 세 변의 수직이등분선의 교점의 좌표는?

- ① (-1, -1)
- ② (2, -2)
- ③ (2, -3)
- ④ (-2, 3)
- ⑤ (-2, -3)

해설

$\overline{AB}$ 의 기울기 : $\frac{2-1}{2-(-1)}$, 중점은 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \Rightarrow$ 수직이등분선
: $y = -3\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$
 $\overline{BC}$ 의 기울기는 $\frac{2-1}{6-2} = \frac{1}{4}$, 중심은 (4, 1) $\Rightarrow$ 수직이등분
선: $y = 2(x - 4) + 1$
두 직선의 교점을 구해보면 $x = 2, y = -3$
 $\therefore$ 세 변의 수직이등분선의 교점은 한 점에서 만나므로
 $\therefore (2, -3)$

해설

세 점을 연결한 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점은 삼각형의 외심이므로 각 점에 이르는 거리가 같다.
 $O(x, y)$ 라고 하면
 $\overline{AO} = \overline{CO}$ 에서 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = (x-6)^2 + y^2, 7x - y = 17 \cdots \textcircled{A}$
 $\overline{BO} = \overline{CO}$ 에서 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = (x-6)^2 + y^2, 2x - y = 7 \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A} \textcircled{B}$ 에서 교점의 좌표는 (2, -3)

17. 좌표평면 위에 두 점 $A(a, b)$, $B(-2, 2)$ 가 있다. 이 0때, $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a+2)^2 + (b-2)^2}$ 의 최솟값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원점을 $O(0, 0)$ 이라 하면

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a+2)^2 + (b-2)^2}$$

$= \overline{OA} + \overline{AB}$ 이므로

이 값이 최소가 되는 것은 세 점 O , A , B 가 일직선 위에 있을 때이다.

따라서 $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최소값은

$$\overline{OB} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

18. 두 점 A(2, 5), B(7, -1)에 대하여 선분 AB를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점 P가 제1사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는? (단, $0 < t < 1$)

① $0 < t < \frac{1}{3}$

② $0 < t < \frac{3}{5}$

③ $0 < t < \frac{5}{6}$

④ $\frac{3}{5} < t < 1$

⑤ $\frac{3}{5} < t < \frac{5}{6}$

해설

점 P가 $\overline{AB}$ 를 $t : (1-t)$ 로 내분하므로

$$P\left(\frac{7t + (1-t) \cdot 2}{t + (1-t)}, \frac{-t + (1-t) \cdot 5}{t + (1-t)}\right)$$

$$\therefore P(5t + 2, -6t + 5)$$

점 P가 제1사분면에 있으므로 $5t + 2 > 0$ 이고 $-6t + 5 > 0$

$$\therefore -\frac{2}{5} < t < \frac{5}{6}$$

이때, $0 < t < 1$ 이므로 구하는 t 의 값의 범위는

$$\therefore 0 < t < \frac{5}{6}$$

19. 두 점 A(-4, 2), B(2, -1)로 부터의 거리의 비가 2 : 1 인 점이 나타내는 원의 중심과 직선 $y = 3x - 4$ 의 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$$

$$2\overline{BP} = \overline{AP}$$

$$4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$

$$4 \cdot \{(x-2)^2 + (y+1)^2\} = (x+4)^2 + (y-2)^2$$

$$3x^2 + 3y^2 - 24x + 12y = 0$$

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$$

원의 중심 (4, -2)와 직선 $3x - y - 4 = 0$ 간의 거리

$$\therefore \frac{|12 + 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

20. 두 원 $x^2 + y^2 - 2 = 0$, $x^2 + y^2 + kx - 4y - 1 = 0$ 의 교점을 지나는 직선이 $x + 2y + 1 = 0$ 과 평행일 때, k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2 - (x^2 + y^2 + kx - 4y - 1) = 0$$

$$\therefore kx - 4y + 1 = 0$$

이 직선이 직선 $x + 2y + 1 = 0$ 과 평행하므로

$$\frac{k}{1} = \frac{-4}{2} \neq \frac{1}{1}$$

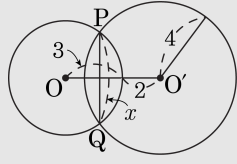
$$\therefore k = -2$$

21. 두 원 O 와 O' 의 반지름의 길이가 각각 3 cm, 4 cm 이고 중심거리가 5 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이를 구하면?

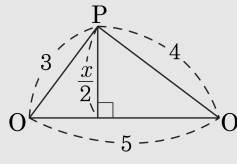
① 4 ② 4.2 ③ 4.4 ④ 4.6 ⑤ 4.8

해설

$\overline{PQ}$ 를 x 라 하면,



확대해보면 두 교점을 P, Q 라 하면,



삼각형의 넓이 : $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{x}{2}$

$\therefore x = \frac{24}{5} = 4.8$

22. 원 $x^2 + y^2 = 8$ 과 제1사분면에서 접하는 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A,B 라고 할 때, 직각삼각형 OAB 의 넓이의 최소값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

제1사분면에서의 원 위의 접점을 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은 $x_1x + y_1y = 8 \cdots \cdots \textcircled{1}$ (단, $x_1 > 0, y_1 > 0$)

한편, 두 점 A,B 는 각각 접선 $\textcircled{1}$ 과 x 축, y 축의 교점이므로

$$A\left(\frac{8}{x_1}, 0\right), B\left(0, \frac{8}{y_1}\right)$$

따라서, 직각삼각형 OAB 의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x_1} \cdot \frac{8}{y_1} = \frac{32}{x_1y_1}$$

이 때, (x_1, y_1) 이 원 $x^2 + y^2 = 8$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 8 \text{ 이고}$$

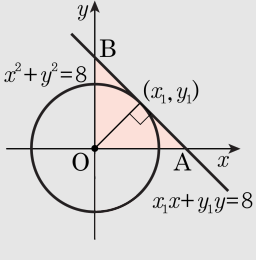
$x_1 > 0, y_1 > 0$ 에서

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1y_1, x_1y_1 \leq 4$$

$$\therefore \frac{1}{x_1y_1} \geq \frac{1}{4} \leftarrow \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\therefore S = \frac{32}{x_1y_1} \geq 32 \cdot \frac{1}{4} = 8 \text{ (단, 등호는 } x_1 = y_1 \text{ 일 때 성립)}$$

따라서, 구하는 넓이의 최소의 값은 8 이다.



23. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$x^2 + y^2 = 16, \quad x^2 + (y - 5)^2 = 9$

- ① $y = \pm \sqrt{6}x + 10$

② $y = \pm 2\sqrt{6}x + 20$

③ $y = \pm 3\sqrt{6}x + 30$

④ $y = \pm 4\sqrt{6}x + 40$

⑤ $y = \pm 5\sqrt{6}x + 50$

해설

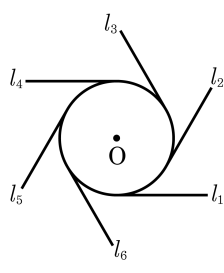
$x^2 + y^2 = 16 \dots\dots \textcircled{1},$
 $x^2 + (y - 5)^2 = 9 \dots\dots \textcircled{2}$
공통접선의 방정식을
 $y = ax + b \dots\dots \textcircled{3}$ 로 놓는다.
이때, 원 $\textcircled{1}$ 과 직선 $\textcircled{3}$ 이 접하므로
$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 4$$

 $\therefore |b| = 4\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots \textcircled{4}$
또, 원 $\textcircled{2}$ 과 직선 $\textcircled{3}$ 도 접하므로
$$\frac{|-5 + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 3$$

 $\therefore |b - 5| = 3\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots \textcircled{5}$
그런데 $b \neq 0$ 이므로 $\textcircled{4} \div \textcircled{5}$ 을 하면
$$\frac{|b - 5|}{b} = \frac{3}{4}$$

 $4|b - 5| = 3|b|, \quad 4(b - 5) = \pm 3b$
 $\therefore b = 20 \text{ 또는 } b = \frac{20}{7}$
(i) $b = 20$ 일 때, $\textcircled{4}$ 에서 $\sqrt{a^2 + 1} = 5$
 $\therefore a = \pm 2\sqrt{6}$
(ii) $b = \frac{20}{7}$ 일 때, $\textcircled{4}$ 에서
 $\sqrt{a^2 + 1} = \frac{5}{7}$ 이고,
이것을 만족하는 실수 a 는 없다.
(i), (ii)로부터 $a = \pm 2\sqrt{6}, b = 20$ 이므로
구하는 공통접선의 방정식은
 $y = \pm 2\sqrt{6}x + 20$

24. 형중이는 수차 제작을 위해 그림과 같은 설계도를 그리고 있다. $l_1, l_2, \dots, l_6$ 는 원주를 6 등분하는 점에서 원의 접선 방향으로 붙인 날개의 단면이다. 두 접선 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터 원의 중심까지의 거리는 반지름의 몇 배인가?



- ① 2 배 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 배 ③ $3\sqrt{5}$ 배
 ④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 배 ⑤ 5 배

해설

그림에서 $l_1 : y = -r$ 라 놓으면

$$l_2 : y = \sqrt{3}x + k = \sqrt{3}x - 2r$$

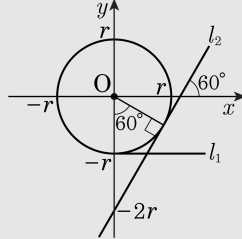
l_2 의 x 절편은 $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ 이고

원의 반지름이 $\cos 30^\circ = \frac{r}{x}$ 이므로

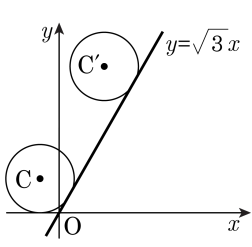
$$x = r \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

따라서, 구하는 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터

원의 중심까지의 거리는 반지름의 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 배이다.



25. 다음 그림과 같이 직선 $y = \sqrt{3}x$ 와 x 축에 접하는 반지름의 길이가 1인 $C : (x + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (y - 1)^2 = 1$ 이 있다. 이것을 직선 $y = \sqrt{3}x$ 위로 두 바퀴 굴려 원 C' 의 방정식이 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$ 이 된다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하면?



- ① $\frac{3 + \sqrt{2}}{3} + (2\sqrt{2} + 1)\pi$

② $\frac{3 - \sqrt{2}}{3} + (2\sqrt{2} - 1)\pi$
- ③ $\frac{3 + \sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3} + 1)\pi$

④ $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3} + 2)\pi$
- ⑤ $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3} + 1)\pi$

해설

i) 원 C 와 원 C' 의 중심을 지나는 직선의 기울기는 $\sqrt{3}$ 이므로
 $\frac{b - 1}{a + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$ 에서
 $b = \sqrt{3}a + 2$
 ii) 원이 두 바퀴 굴러 갔으므로 원 중심 사이의 거리는 4π 이다.
 $\Rightarrow (a + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (b - 1)^2 = 16\pi^2$
 i) 을 ii) 에 대입하여 정리하면,
 $4a^2 + \frac{8}{3}\sqrt{3}a + \frac{4}{3} = 16\pi^2$
 $3a^2 + 2\sqrt{3}a + 1 = 12\pi^2$
 $\Rightarrow (\sqrt{3}a + 1)^2 = (2\sqrt{3}\pi)^2$
 $\Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}\pi - 1}{\sqrt{3}} \quad (\because a > 0)$
 $\Rightarrow b = 2\sqrt{3}\pi + 1$
 $\therefore a + b = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3} + 2)\pi$