

1. $\frac{1}{\sqrt{-2} - \sqrt{-1}}$ 의 값은 ?

① $1 - \sqrt{2}$

② $-1 - \sqrt{2}$

③ $(1 + \sqrt{2})i$

④ $-(1 + \sqrt{2})i$

⑤ $(1 - \sqrt{2})i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-2} - \sqrt{-1}} &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{1}{i} \\ &= (\sqrt{2} + 1) \times (-i) \\ &= -(1 + \sqrt{2})i\end{aligned}$$

2. x, y 가 양의 실수이고, $x^2 + xyi + y^2 - 5 - 2i = 0$ 일 때, $x + y$ 의 값을 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$$(x^2 + y^2 - 5) + (xy - 2)i = 0$$

$$x^2 + y^2 - 5 = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$xy - 2 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하면

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 4 = 9$$

$$\therefore x + y = 3 \quad (\because x, y \text{ 는 양의 실수})$$

3. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = 1$ 을 만족하는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 4$

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i \text{ 에서}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^1 = -i$$

$$n = 2 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = (-i)^2 = -1$$

$$n = 3 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = (-i)^3 = i$$

$$n = 4 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = (-i)^4 = 1$$

따라서 조건을 만족하는 최소의 자연수는 4이다.

4. $\overline{z - zi} = 1 - i$ 를 성립시키는 복소수 z 은?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $-i$

② 0

③ i

④ $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

⑤ $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

해설

$$\overline{z - zi} = \overline{z(1 - i)}$$

$$= \bar{z} \cdot \overline{1 - i}$$

$$= \bar{z}(1 + i)$$

$$\bar{z}(1 + i) = (1 - i)$$

$$\therefore \bar{z} = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)(1 - i)} = -i$$

$$\therefore z = i$$

5. 방정식 $|x-3| + |x-4| = 2$ 의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

i) $x < 3$ 일 때,

$$-(x-3) - (x-4) = 2, -2x = -5$$

$$\therefore x = \frac{5}{2}$$

ii) $3 \leq x < 4$ 일 때

$$(x-3) - (x-4) = 2, 0 \cdot x = 1$$

$\therefore$ 해가 없다.

iii) $x \geq 4$ 일 때

$$x-3 + x-4 = 2, 2x = 9$$

$$\therefore x = \frac{9}{2}$$

따라서 $x = \frac{5}{2}, \frac{9}{2}$ 이고 그 합은 7

6. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0$$

① $0, \pm 1$

② $0, \pm 2$

③ $\pm 1, \pm 2$

④ $\pm 2, \pm 3$

⑤ $\pm 3, \pm 4$

해설

(i) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$ 에서

$x \geq 0$ 일 때,

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = 2, \text{ 또는 } x = 3$$

(ii) $x < 0$ 일 때,

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x + 2)(x + 3) = 0$$

$$\therefore x = -2, \text{ 또는 } x = -3$$

(i), (ii)에서 $x = \pm 2, x = \pm 3$

7. 이차방정식 $x^2 - x + m = 0$ 의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하여라.
(단, m 은 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + m = 0$ 의 한 근이 2이므로

$x = 2$ 를 대입하면

$$2^2 - 2 + m = 0 \quad \therefore m = -2$$

따라서 주어진 방정식은 $x^2 - x - 2 = 0$ 이다.

이 방정식을 풀면

$$(x - 2)(x + 1) = 0 \text{에서 } x = 2 \text{ 또는 } x = -1$$

이므로 다른 한 근은 -1이다.

8. 이차방정식 $3x^2 - 6x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{4}{3}$

② $\alpha^3 + \beta^3 = -1$

③ $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = 1$

④ $\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\beta} = \frac{12}{13}$

⑤ $(\alpha - \beta)^2 = -\frac{4}{3}$

해설

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = -\frac{-6}{3} = 2, \alpha\beta = \frac{4}{3}$$

① $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ (참)

② $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$
 $= 2^3 - 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2 = 0 \neq -1$ (거짓)

③ $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{4}{3} \div \frac{4}{3} = 1$ (참)

④ $\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\beta} = \frac{2+\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta} = \frac{2+2}{1+2+\frac{4}{3}} = \frac{12}{13}$ (참)

⑤ $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 - \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}$ (참)

9. 이차방정식 $x^2 - mx + 91 = 0$ 의 두 근, α, β 는 서로소이다. 이때, 실수 m 의 값은? (단, α, β 는 $\alpha > 1, \beta > 1$ 인 자연수)

① 10

② 20

③ 35

④ 55

⑤ 100

해설

근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha + \beta = m, \alpha\beta = 91$

α 와 β 가 서로소이고 자연수이므로

$(\alpha, \beta) = (1, 91)$ 또는 $(7, 13)$ 이다.

여기서 $\alpha > 1, \beta > 1$ 이므로

$(\alpha, \beta) = (7, 13)$

$\therefore m = \alpha + \beta = 20$

10. 최솟값이 -5 이고, 대칭축이 $x = -1$ 인 이차함수의 식이 $y = 2(x + p)^2 + q$ 일 때, $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

최솟값이 -5 이므로 $q = -5$

대칭축이 $x = -1$ 이므로 $p = 1$

$\therefore p + q = 1 - 5 = -4$

11. $-2 \leq x \leq 0$ 에서 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + a + 1$ 이 최댓값 1 을 가질 때, 상수 a 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$y = -2x^2 + 4x + a + 1 = -2(x - 1)^2 + a + 3$ 이
이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표 1 이
 x 의 값의 범위 $-2 \leq x \leq 0$ 에 속하지 않으므로
주어진 이차함수는 $x = -2$ 일 때 최솟값을 갖고
 $x = 0$ 일 때 최댓값을 갖는다.

최댓값이 1 이므로 $a + 1 = 1 \quad \therefore a = 0$

12. 차가 14 인 두 수의 곱의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

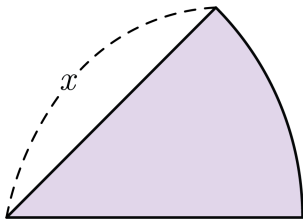
▷ 정답 : -49

해설

두 수를 x , $x + 14$ 라 하고, 두 수의 곱을 y 라고 하면 $y = x(x + 14) = x^2 + 14x = (x + 7)^2 - 49$

따라서 $x = -7$ 일 때, 최솟값 -49 를 갖는다.

13. 둘레의 길이가 12 인 부채꼴에서 반지름의 길이를 x 라 하고, 부채꼴의 넓이를 y 라 할 때, 부채꼴의 넓이를 최대가 되게 할 때, 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

부채꼴의 넓이를 y , 반지름의 길이를 x 라 하면

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (12 - 2x) \\ &= x(6 - x) \\ &= -x^2 + 6x \\ &= -(x^2 - 6x + 9 - 9) \\ &= -(x - 3)^2 + 9 \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.

따라서 꼭짓점이 $(3, 9)$ 이므로 반지름의 길이 $x = 3$ 일 때, 부채꼴의 넓이 y 가 최댓값 9를 가진다.

14. 연립방정식 $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 1 \end{cases}$ 에서 xy 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = x - 3$ 을 이차식에 대입하면

$$x^2 + 2x(x - 3) + (x - 3)^2 = 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\therefore x = 1, 2$$

(i) $x = 1$ 일 때 $y = -2$

(ii) $x = 2$ 일 때 $y = -1$

따라서 $xy = -2$

15. 빗변의 길이가 $\frac{5}{2}$ 인 직각 삼각형의 넓이가 $\frac{3}{2}$ 일 때, 빗변이 아닌 두 변의 길이의 합은?

① $\frac{\sqrt{37}}{2}$

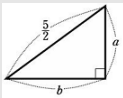
② $\frac{\sqrt{34}}{2}$

③ $\frac{\sqrt{31}}{2}$

④ 4

⑤ $\frac{7}{2}$

해설



직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b 라 하면 넓이는

$$\frac{1}{2}ab = \frac{3}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a^2 + b^2 = \frac{25}{4} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②식에서

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$= \frac{25}{4} + 6 = \frac{49}{4}$$

$$\therefore a + b = \frac{7}{2}$$

16. $x = -1 + i$ 일 때, $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$ 의 값을 구하면?

① $-1 + i$

② $-i$

③ i

④ -1

⑤ 1

해설

$$x = i - 1 \Rightarrow x + 1 = i$$

양변을 제곱해서 정리하면 $x^2 + 2x + 2 = 0$

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$$

$$= x^2(x^2 + 2x + 2) - x^2 - x - 1$$

$$= -x^2 - x - 1 \quad (\because x^2 + 2x + 2 = 0)$$

$$= -(-2x - 2) - x - 1$$

$$= x + 1 = i$$

17. $y = ax^2 + bx + c$ 에서 $a > 0$, $b^2 - 4ac > 0$ 일 때, y 의 최댓값, 최솟값에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 최댓값, 최솟값이 없다.

② 최솟값이 양수이다.

③ 최솟값이 음수이다.

④ 최댓값이 양수이다.

⑤ 최댓값이 음수이다.

해설

아래로 볼록하고, x 축과 두 점에서 만나므로 최솟값은 음수이다.

18. 아래 그림과 같이 40 m 인 철망으로 직사각형의 모양의 닭장을 만들려고 한다.

넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?



① 6m

② 8m

③ 10m

④ 12m

⑤ 14m

해설

직사각형의 세로의 길이를 x , 가로 길이를 $20 - 2x$ 라고 하면,

$$y = x(40 - 2x)$$

$$= -2x^2 + 40x$$

$$= -2(x - 10)^2 + 200$$

$x = 10$ 일 때, 최댓값은 200 이다.

19. 지상에서 초속 50m 의 속력으로 쏘아 올린 공의 t 초 후의 높이는 $(50t - 5t^2)$ m 이다. 이 공의 높이가 지상으로부터 최대가 되는 것은 쏘아 올린지 몇 초 후인가?

- ① 5 초 후 ② 7 초 후 ③ 8 초 후
④ 10 초 후 ⑤ 알 수 없다

해설

$$y = 50t - 5t^2$$

$$y = -5(t^2 - 10t + 25 - 25)$$

$$= -5(t - 5)^2 + 125$$

따라서 5 초 후에 최고 높이 125m 가된다.

20. 사차방정식 $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1 = 0$ 의 한 근을 α 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

먼저 주어진 방정식을 x^2 으로 나누면

$$\text{방정식은 } x^2 - 6x + 11 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0 \text{이 된다.}$$

이 식에 α 를 넣어도 성립하므로

$\alpha + \frac{1}{\alpha}$ 를 t 로 치환하면

$\alpha + \frac{1}{\alpha}$ 는 3이 된다.

$$\text{따라서 } \alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$$

21. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라 하고

$z = \frac{\omega + 1}{2\omega + 1}$ 라 할 때, $z\bar{z}$ 의 값을 구하면?

(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다)

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{4}{5}$

⑤ $\frac{3}{7}$

해설

$x^3 - 1 = 0(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$ 에서

$w, \bar{w}$ 는 $x^2 + x + 1 = 0$ 의

두 근이므로 근과 계수의 관계에서

$$w + \bar{w} = -1, w\bar{w} = 1$$

또한, $z = \frac{\omega + 1}{2\omega + 1}$ 에서 $\bar{z} = \frac{\bar{w} + 1}{2\bar{w} + 1}$ 이므로

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= \frac{w+1}{2w+1} \times \frac{\bar{w}+1}{2\bar{w}+1} \\ &= \frac{w\bar{w} + (w+\bar{w}) + 1}{4w\bar{w} + 2(w+\bar{w}) + 1} = \frac{1 - 1 + 1}{4 - 2 + 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

해설

$x^3 - 1 = 0, (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore w^2 + w + 1 = 0, w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 라 하자

$$\begin{aligned} z &= \frac{w+1}{2w+1} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{3}i - 3}{6} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6} \end{aligned}$$

$$z\bar{z} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6} \times \frac{3 + \sqrt{3}i}{6} = \frac{9 + 3}{36} = \frac{1}{3}$$

22.
$$\begin{cases} |x| + x + y = 10 \\ x + |y| - y = 12 \end{cases}$$
 일 때, $x + y$ 의 값은?

① -2

② 2

③ $\frac{18}{5}$

④ $\frac{22}{3}$

⑤ 22

해설

$$|x| + x + y = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x + |y| - y = 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$x \leq 0 \text{ 이면, } y = 10, x = 12$$

이것은 $x \leq 0$ 을 만족하지 않는다.

$$x > 0 \text{ 이면 } 2x + y = 10 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$y \geq 0 \text{ 이면 } x = 12, y = -14$$

이것은 $y \geq 0$ 을 만족하지 않는다.

$$y < 0 \text{ 이면, } x - 2y = 12 \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣} \text{ 에서 } x = \frac{32}{5}, y = -\frac{14}{5}$$

$$\therefore x + y = \frac{18}{5}$$

23. 실수 x, y 에 대하여 $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0$ 일 때, xy 의 값은?

① -6

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 6

해설

$$2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0 \text{ 을}$$

x 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$2x^2 + 2(y+1)x + y^2 - 2y + 5 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이 때, x 는 실수이므로 $\textcircled{1}$ 은 실근을 가져야 한다.

$$D = (y+1)^2 - 2(y^2 - 2y + 5) \geq 0$$

$$-y^2 + 6y - 9 \geq 0 \quad (y-3)^2 \leq 0$$

$$\therefore y = 3$$

$y = 3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2x^2 + 8x + 8 = 0, \quad x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0$$

$$\therefore x = -2 \quad \therefore xy = (-2) \cdot 3 = -6$$

24. 다음 방정식을 만족하는 양의 정수 x, y 의 값이 아닌 것은?

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1$$

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1$ 의 양변에 xy 를 곱하면

$$2y + 3x = xy, \quad xy - 3x - 2y = 0$$

$$\therefore (x-2)(y-3) = 6$$

이 때, x, y 는 양의 정수이므로

$x-2 \geq -1, y-3 \geq -2$ 인 정수이다.

따라서, $x-1, y-3$ 의 값은 다음 표와 같다.

$x-2$	1	2	3	6
$y-3$	6	3	2	1

그러므로 구하는 x, y 의 값은 $\begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$ 또는

$$\begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases}$$

25. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 해를 α, β 라고 할 때, 삼차함수 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 가 $f(\alpha) = \alpha, f(\beta) = \beta, f(\alpha + \beta) = \alpha + \beta, f(0) = -1$ 을 만족한다. 이 때 $ab + cd$ 의 값은?

① -5

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 5

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근 : α, β ,

$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1$

$f(\alpha) = \alpha, f(\beta) = \beta,$

$f(\alpha + \beta) = \alpha + \beta$ 이므로

$f(x) - x = a(x - \alpha)(x - \beta) \{x - (\alpha + \beta)\}$

$f(0) = -1 \Rightarrow -1 = -a\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$\therefore a = 1 (\because \alpha\beta = 1, \alpha + \beta = 1)$

$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - 1) + x$

$(\because \alpha + \beta = 1)$

$f(x) = x^3 - (\alpha + \beta + 1)x^2 + (\alpha\beta + \alpha + \beta + 1)x - \alpha\beta$

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

$\Leftrightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$a = 1, b = -2, c = 3, d = -1$

$\therefore ab + cd = -2 - 3 = -5$