1. 다음은 ${}_{10}P_5 = (\boxed{\text{가}}) + (\boxed{\text{(나}})$ 임을 보인 것이다.

10개의 숫자 1, 2, 3, $\cdots$, 9,10중에서 서로 다른 5개의 숫자를 뽑아서 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는 ${}_{10}P_5$ 이다.
이 때, 다섯 자리의 자연수 중에서 숫자 2가 들어있는 것의 개수는 $(\boxed{\text{가}})$, 숫자 2가 들어 있지 않은 것의 개수는 $(\boxed{\text{나}})$ 이다.
따라서 다음 등식이 성립한다.
${}_{10}P_5 = (\boxed{\text{가}}) + (\boxed{\text{나}})$

위의 과정에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① ${}_9P_4, 5{}_9P_5$　② $5{}_9P_4,\ {}_9P_5$　③ ${}_9P_4,\ {}_8P_5$
④ ${}_8P_4,\ 4{}_9P_5$　⑤ $4{}_9P_4,\ {}_9P_5$

해설

다섯 자리의 자연수 중 2가 들어 있는 것의 개수는 2를 제외한 9개의 숫자중에서
4개를 택하여 나열한 후 2를 추가하면 되므로 ${}_9P_4 \times 5 = 5{}_9P_4$
2가 들어 있지 않은 것의 개수는 2를 제외한 9개의 숫자에서 5개를 택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_9P_5$ 이다.
따라서 ${}_{10}P_5 = 5{}_9P_4 + {}_9P_5$

2. n 권의 책이있다.(단, $n \geq 5$) 이 n 권 중에서 2 권의 책을 뽑아 책꽂이에 일렬로 꽂을 때, 그 총 방법의 수가 42 가지였다. n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 7$

해설

n 권에서 2 권을 뽑는 순열의 수는 ${}_nP_2$ 가지이므로
${}_nP_2 = 42$ 곧, $n(n-1) = 42 \quad \therefore \ (n+6)(n-7) = 0$
한편, $n \geq 2$ 이므로 $n = 7$

3. 초등학생 4명, 중학생 3명, 고등학생 2명을 일렬로 세울 때, 초등학생은 초등학생끼리, 중학생은 중학생끼리 이웃하여 서는 방법의 수는?

① 3400 ② 3456 ③ 3500 ④ 3546 ⑤ 3650

해설

초등학생, 중학생을 각각 하나로 보면 4 명이 이웃하는 방법과 같다.
$\Rightarrow 4! = 24$
여기에 초등학생, 중학생끼리 자리를 바꾸는 방법을 각각 곱해준다.
$\therefore 24 \times 4! \times 3! = 3456$

4. 남자 4 명, 여자 3 명을 일렬로 세울 때, 여자 3 명이 이웃하여 서는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 720 가지

해설
여자 3 명을 한 묶음으로 본다.
$5! \times 3! = 720$

5. silent의 6개의 문자를 일렬로 배열할 때, 적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우의 수는?

① 36 ② 72 ③ 144 ④ 288 ⑤ 432

해설

전체의 경우의 수에서 양쪽 끝 모두 자음이 오는 경우의 수를 빼준다.

$6! - {}_4P_2 \times 4! = 432$

6. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 이 적혀 있는 7 개의 카드 중에서 서로 다른 5 개의 카드를 뽑아 나열한다. 이 때, 위의 그림의 예와 같이 첫 번째 카드와 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자의 합이 8 이 면서 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자가 3 이상이 되도록 나열하는 방법의 수는?

$\boxed{2}\ \boxed{5}\ \boxed{7}\ \boxed{3}\ \boxed{6}$

① 120 ② 180 ③ 240 ④ 300 ⑤ 360

해설

첫 번째 카드와 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자의 합이 8 이면서 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자가 3 이상인 경우는 $1-7, 2-6, 3-5, 5-3$ 의 4가지이다.
이 4가지 경우에 대하여 각각 중앙에 남은 세 자리에 5개의 수 중에서
3개를 택하여 나열하는 방법의수는
${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ (가지)
따라서 구하는 방법의 수는 $4 \times 60 = 240$ (가지)

7. 야구 선수 9명 중에서 4명을 뽑아 일렬로 세울 때, 투수와 포수가 모두 포함되고, 서로 이웃하는 경우는 몇 가지인가?

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 252 가지

해설

투수와 포수를 제외한 7명에서 나머지 2명을 선택한 다음 투수와 포수를 한 묶음으로 보고 줄을 세우고 다시 투수와 포수가 자리를 바꾸는 경우의 수를 곱하여 준다.

${}_7C_2 \times 3! \times 2! = 252$

8. 2000 의 양의 약수 중 제곱수가 아니면서 짝수인 것의 개수는?

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

해설

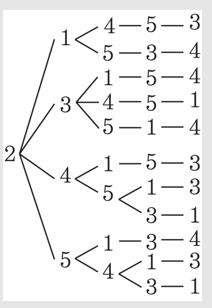
$2000 = 2^4 \cdot 5^3$ 의 양의 약수는
$2^j \cdot 5^k (0 \le j \le 4, 0 \le k \le 3)$ 의 형태이다.
그러므로 제곱수가 아니면서 짝수인 것은
$2 \cdot 5^k (k = 0, 1, 2, 3)$
$2^2 \cdot 5^k \ (k = 1,\ 3)$
$2^3 \cdot 5^k \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$
$2^4 \cdot 5^k (k = 1, 3)$ 의 형태이므로
구하는 개수는 $4 + 2 + 4 + 2 = 12$ (개)

9. $1, 2, 3, 4, 5$ 를 일렬로 배열할 때 i 번째 숫자를 $a_i(1 \le i \le 5)$ 라고 하면$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)(a_4 - 4)(a_5 - 5) \neq 0$ 인 경우의 수는 몇 가지인지 구하시오.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 44 가지

해설



$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)$ $(a_4 - 4)(a_5 - 5) \neq 0$ 인 것은 $a_1 \neq 1, a_2 \neq 2, a_3 \neq 3, a_4 \neq 4, a_5 \neq 5$ 인 것을 뜻한다.

$a_1 \neq 1$ 이므로 $a_1 = 2, 3, 4, 5$ 인 경우에 따라서 조사한다.

$a_2 \neq 2$ 인 경우 $a_2 = 1, 3, 4, 5$ 의 네 가지 경우가 있으며, 위 수형도와 같이 조사해 보면 모두 11 가지가 있다.

$a_1 = 3, 4, 5$ 인 경우도 마찬가지이므로 구하는 모든 경우의 수는 $4 \times 11 = 44$ (가지)

10. 남자 아이 4명과 여자 아이 3명이 일렬로 서서 기차놀이를 하려하고 있다. 단 여자 아이들은 연속해서 줄세우지 않고 기차를 만든다면 몇 가지의 기차를 만들 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 1440 가지

해설

남자아이 4 명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4! = 24$
남자아이들 사이 및 양끝에 5 개의 자리 중 3 개의 자리에 여자아이를 세우는 방법의 수는 ${}_5P_3 = 60$
따라서 구하는 방법의 수는 $24 \times 60 = 1440$

11. 2010년 대선에 남자 4명, 여자 3명의 후보자가 나왔다. 후보자들의 합동 토론회가 끝난 후 기념 촬영을 할 때, 다음 두 조건을 만족하도록 일렬로 세우는 경우의 수를 구하여라.

(가) 특정한 남자 후보 2명을 양쪽 끝에 세운다. (나) 남자 후보끼리 나란하지 않도록 세운다.

▶ 답 : ＿＿＿＿＿ 가지

▷ 정답 : 24가지

해설

양쪽 끝에 특정한 2명의 남자 후보를 세우는 방법의 수는 2가지이고, 나머지 남자 후보 2명과 여자 후보 3명을 남자 후보가 나란하지 않도록 세우는 방법은 $2! \times 3!$ 이므로

구하는 방법의 수는 $2 \times 2! \times 3! = 24$ (가지)

12. 키가 모두 다른 남학생 세 명과 여학생 세 명이 일렬로 놓인 의자에 앉으려고 한다. 남학생끼리는 키가 작은 학생이 큰 학생보다 왼쪽에 앉아야 할 때, 방법의 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 120

해설

남학생 세 명이 앉는 순서는 정해져 있다.
6명이 앉는 방법의 수를 남학생 3명이 자리를 바꿔 앉는 방법의 수로 나누면
$\frac{6!}{3!} = 120$

13. 5 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 를 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만들 때, 1 과 2 사이에 다른 숫자가 2 개 이상 들어가 있는 자연수의 개수는?

① 24 ② 36 ③ 48 ④ 52 ⑤ 64

해설

5 개의 숫자로 만들 수 있는 자연수의 개수는 $5!$ (개)
1, 2 가 이웃하는 자연수의 개수는 $2 \times 4!$ (개)
1 과 2 사이에 다른 숫자가 한 개 들어가 있는 자연수의 개수는
$3 \times 2! \times 3!$ (개)
따라서, 구하는 자연수의 개수는
$5! - (2 \times 4! + 3 \times 2! \times 3!) = 36$ (개)

14. ${}_nP_r = 360,\ {}_nC_r = 15$ 일 때, $n + r$ 의 값은?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}\,{}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$\Rightarrow r! = 24, r = 4$

$${}_nP_4 = \frac{n!}{(n-4)!} = n(n-1)(n-2)(n-3) = 360$$

$\Rightarrow 360 = 6 \times 5 \times 4 \times 3$

$\therefore n = 6$

따라서 $n + r = 10$

15. 서로 다른 책이 11권 꽂혀 있는 책장에서 3권의 책을 꺼낼 때, 읽은 책이 적어도 한 권 포함되는 경우의 수가 130이라면 읽은 책은 몇 권인가?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

전체의 경우의 수에서 읽은 책이 하나도 포함되지 않는 경우를 빼준다. 읽은 책의 권수를 x 라 하면,

${}_{11}C_3 - {}_{11-x}C_3 = 130$

${}_{11-x}C_3 = 35$

$11 - x = 7, x = 4$

16. 십이각형의 서로 다른 대각선의 교점 중 세 선분이 교차하는 점이 없다고 할 때 대각선의 교점은 몇 개인지 구하여라. (단 꼭짓점은 제외한다.)

▶ 답: 개

▷ 정답: 495 개

해설

대각선의 교점은 두 대각선에 의해 결정되고 두 대각선은 4 개의 점에 의해 결정되므로 십이각형의 대각선의 교점의 최대 개수는 $_{12}C_4 = 495$

17. 8 명이 타고 있는 승강기가 2 층으로부터 11 층까지 10 개 층에서 설 수 있다고 한다. 이때, 각각 4 명, 2 명, 2 명씩 3 개 층에서 모두 내리게 되는 방법의 수는?

① 75600　　② 84400　　③ 92400

④ 12450　　⑤ 151200

해설

8 명을 4 명, 2 명, 2 명씩 나누는 방법의 수는

${}_8C_4 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}$ 이고,

이와 같이 3 개층에 내리게 되는 방법의 수는

${}_{10}P_3$ 이다.

$\therefore\ {}_8C_4 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \times {}_{10}P_3 = 151200$

18. 토정비결에서는 다음 조건에 맞는 3개의 수 A, B, C로 각 사람의 그 해의 운세 $\boxed{A \mid B \mid C}$를 결정한다.

> (1) A는 태어난 해에 해당하는 수를 3으로 나눈 나머지
> (2) B는 태어난 달에 해당하는 수를 6으로 나눈 나머지
> (3) C는 태어난 날에 해당하는 수를 8로 나눈 나머지

토정비결에 있는 서로 다른 운세 $\boxed{A \mid B \mid C}$는 모두 몇 가지인가?
(단, 나머지가 0인 경우에는 나누는 수를 나머지로 한다)

① 64가지 ② 144가지 ③ 127가지
④ 216가지 ⑤ 254가지

해설

A는 1, 2, 3 총 3가지, B는 1부터 6까지 총 6가지, C는 1부터 8까지 총 8가지
따라서 총 가지 수는 $3 \times 6 \times 8 = 144$가지

19. 100 원짜리 동전 2 개, 50 원짜리 동전 3 개, 10 원짜리 동전 4 개를 사용하여 거스름돈 없이 지불하는 경우에 지불방법의 수를 a, 지불금액의 수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 : ____ 가지

▷ 정답 : 98 가지

해설

10 원, 50 원, 100 원짜리 동전을 각각 x 개, y 개, z 개 사용한다고 하면,

1) 지불방법의 수는
 $x = 0, 1, 2, 3, 4$
 $y = 0, 1, 2, 3$
 $z = 0, 1, 2$
 중에서 $x = y = z = 0$ 을 제외한 지불방법의 총 가짓수 a 는,
 $a = 5 \times 4 \times 3 - 1 = 59$ (가지)
2) 지불금액의 수를 구할 때 50 원짜리가 3 개이므로 이 중 2 개를 합하면 100 원짜리 하나와 같으므로 100 원짜리 동전 2 개를 50 원짜리 동전 4 개로 바꾸어 생각한다.
 즉, 50 원짜리 7 개, 10 원짜리 4 개로 계산하는 금액과 동일하다.
 $x = 0, 1, 2, 3, 4$
 $y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$
 중에서 $x = y = z = 0$ 을 제외한 지불금액의 총 가짓수 b 는,
 $b = 5 \times 8 - 1 = 39$

$\therefore a + b = 59 + 39 = 98$

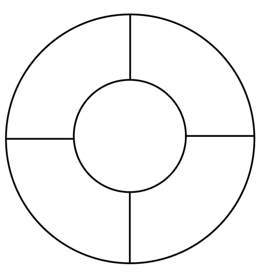
해설

a 를 구하기 위하여 동전 1 개, 2 개, $\cdots\cdots$ 9 개로 각각 만들 수 있는 금액의 경우를 알아보면,

동전 1 개 $\Rightarrow$ 10, 50, 100
동전 2 개 $\Rightarrow$ 20, 60, 100, 110, 150, 200
동전 3 개 $\Rightarrow$ 30, 70, 110, 120, 150, 160, 200, 210, 250
동전 4 개 $\Rightarrow$ 40, 80, 120, 130, 160, 170, 210, 220, 250, 260, 300
동전 5 개 $\Rightarrow$ 90, 130, 140, 170, 180, 220, 230, 260, 270, 310, 350
동전 6 개 $\Rightarrow$ 140, 180, 190, 230, 240, 270, 280, 320, 360
동전 7 개 $\Rightarrow$ 190, 240, 280, 290, 330, 370
동전 8 개 $\Rightarrow$ 290, 340, 380
동전 9 개 $\Rightarrow$ 390

이상에서, 지불방법의 총 가짓수 a 는,
$a = 3 + 6 + 9 + 11 + 11 + 9 + 6 + 3 + 1 = 59$ (가지)

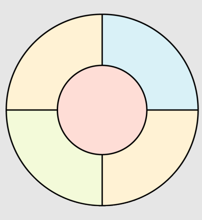
20. 다음의 원형 판에 서로 다른 4 가지의 색을 칠하려고 한다. 접한 부분은 서로 다른 색을 칠하고, 4 가지 색을 모두 사용한다고 할 때, 칠하는 방법의 수는? (단 회전해서 같은 모양이 나오면 같다고 생각한다.)



① 12 ② 16 ③ 20 ④ 23 ⑤ 24

해설

접한 곳은 다른 색을 칠하고 4 가지 색을 모두 사용하기 위해서는 서로 마주 보는 부분 1 쌍은 항상 같은 색이어야 한다.



또한 서로 다른 색인 마주보는 1 쌍은 서로 자리를 바꾸어도 같은 경우가 되므로, 가운데 부분부터 선택할 수 있는 각 색의 수는

$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 12$

$\therefore$ 12 가지

21. 어떤 원자의 전자들은 에너지의 증감에 따라 세 가지 상태 a, b, c로 바뀐다. 이 때, 다음 규칙이 적용된다고 하자.

> 규칙1: 에너지가 증가하면 b상태의 전자는 c상태로 올라가고, a상태의 전자 중 일부는 b상태로, 나머지는 c상태로 올라간다.
> 규칙2: 에너지가 감소하면 b상태의 전자는 a상태로 내려가고, c상태의 전자 중 일부는 b상태로, 나머지는 a상태로내려간다.

<단계1>에서 전자는 a상태에 있다. 에너지가 증가하여 <단계2>가 되면 이 전자는 b상태 또는 c상태가 된다. 이때, 이 전자가 취할 수 있는 변화의 경로는 $a \to b$와 $a \to c$의 2가지이다. 다시 에너지가 감소하여 <단계3>이 되면, 이 때까지의 가능한 변화 경로는 $a \to b \to a$, $a \to c \to b$, $a \to c \to a$의 3가지이다. 이와 같이 순서대로 에너지가 증감을 반복할 때, <단계1>부터 <단계7>까지 이 전자의 가능한 변화 경로의 수는?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

단계 1 : 1가지,
단계 2 : 2가지,
단계 3 : 3가지,
단계 4 : 5가지 $\cdots$
즉, 피보나치 수열을 이룬다.
따라서 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, $\cdots\cdots$
$\therefore$ 단계 7 : 21

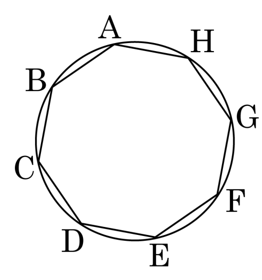
22. 1, 2, 3, 4, 5, 6 의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6 개의 상자와 6 개의 공이 있다. 한 상자에 하나씩 임의로 공을 담을 때, 상자에 적힌 숫자와 공에 적힌 숫자가 일치하는 상자의 수가 3 개인 경우의 수는?

① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

해설

6 개의 상자 중에서 상자에 적힌 숫자와 공에 적힌 숫자가 일치하는 3 개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_3 = 20$ (가지) 이다.
이때, 예를 들어 선택된 상자가 1, 2, 3 이라 하면 나머지 4, 5, 6 상자는 공에 적힌 숫자와 모두 달라야 하므로 4, 5, 6 상자에 각각 (5, 6, 4) 또는 (6, 4, 5) 의 공이 차례로 들어가야 하므로 2 가지 경우가 있다.
그런데 나머지 경우에 대하여도 각각 2 가지씩 존재하므로 구하는 경우의 수는 $20 \times 2 = 40$ (가지)

23. 원에 내접하는 팔각형에서 세 개의 꼭짓점을 이을 때 만들어지는 삼각형을 다음과 같이 구하고자 한다.

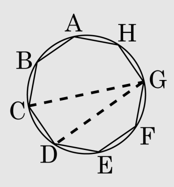


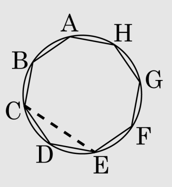
팔각형과 한 변을 공유하는 삼각형의 개수는 a 개, 팔각형과 두 변을 공유하는 삼각형의 개수는 b 개, 따라서 팔각형과 한 변도 공유하지 않는 삼각형의 개수는 c 개이다. 위의 과정에서 $a+b-c$ 의 값은?

① 24　　② 26　　③ 28　　④ 30　　⑤ 32

해설

한 변을 공유하는 경우는 한 변마다 꼭짓점이
4 개씩 있으므로,
$4\times 8=32$(개) $\Rightarrow\quad a=32$
두 변을 공유하는 경우는 꼭짓점 한 개에 한 개씩
모두 8 (개) $\Rightarrow\quad b=8$
따라서 변을 공유하지 않는 삼각형은
${}_8C_3-32-8=16\quad\Rightarrow\quad c=16$





$\therefore\ a+b-c=32+8-16=24$

24. 좌표평면 위의 6 개의 평행한 직선 $x = m$ $(m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ 와 5 개의 평행한 직선 $y = n$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 로 만들어지는 직사각형 중에서 점 $A\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ 를 포함하지 않는직사각형의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 102 개

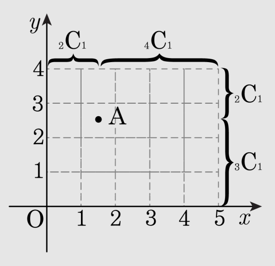
해설

6 개의 평행한 직선 $x = m$ $(m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ 와
5 개의 평행한 직선 $y = n$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 로
만들어지는 직사각형의 총 개수는

$${}_6C_2 \times {}_5C_2 = \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{5 \times 4}{2} = 150\ (\text{개})$$

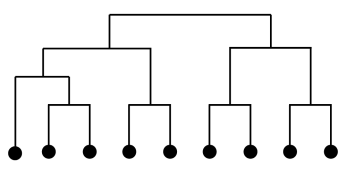
이 중에서 점 $A\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ 를 포함하는 직사각형의

개수는 $({}_2C_1 \times {}_4C_1) \times ({}_2C_1 \times {}_3C_1) = 8 \times 6 = 48$ (개)



따라서, 구하는 직사각형의 개수는 $150 - 48 = 102$ (개)

25. 9 개의 팀이 다음 그림과 같은 토너먼트 방식으로 시합을 가질 때, 대진표를 작성하는 방법은 몇 가지인가?



① 3780 ② 7560 ③ 11340

④ 15120 ⑤ 18900

해설

일단 9 명을 5 명,4 명으로 나눈다. $\Rightarrow {}_9 C_5 = 126$

1) 왼쪽의 조의 경우 먼저 3 명, 2 명으로 나누고,

3 명중 부전승으로 올라갈 사람 1 명을 선택한다.

$\Rightarrow {}_5 C_3 \times {}_3 C_1 = 30$

2) 오른쪽의 조는 2 명, 2 명으로 나눈다.

$\Rightarrow {}_4 C_2 \times {}_2 C_2 \times \dfrac{1}{2!} = 3$

$\therefore 126 \times 30 \times 3 = 11340$