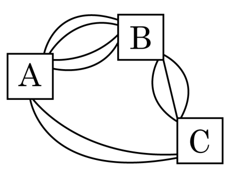
1. 아래쪽 그림과 같이 A 에서 B 로 가는 길은 4가지, B 에서 C 로 가는 길은 3가지, A 에서 C 로 가는 길은 2가지이다. A 에서 C 를 왕복하는데 B 를 한 번만 거치는 방법의 수를 구하여라.



▶ 답 : _____ 가지

▷ 정답 : 48가지

해설

(i) $A-B-C-A$ 인 경우의 수는 $4\times3\times2=24$
(ii) $A-C-B-A$ 인 경우의 수는 $2\times3\times4=24$ 이상에서 구하는 방법의 수는
$24+24=48$

2. 100 원, 300 원, 500 원짜리 3 종류의 사탕이 있다. 이 사탕을 1000 원어치 사는 방법의 수는?

① 7 개　② 10 개　③ 13 개　④ 15 개　⑤ 17 개

해설

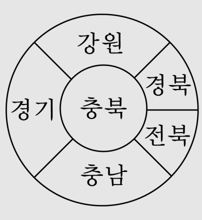
500 원을 기준으로 생각한다.
100 원을 A, 300 원을 B라 하면,
(1) 500 원 0 개 :
$(A, B) = (1, 3),\ (4, 2),\ (7, 1),\ (10, 0)$
(2) 500 원 1 개 : $(A, B) = (2, 1),\ (5, 0)$
(3) 500 원 2 개 : $(A, B) = (0, 0)$
$\therefore$ 총 7 개

3. 다음 그림은 우리나라 지도의 일부분이다. 6 개의 도를 서로 다른 4 가지의 색연필로 칠을 하여 도(☒)를 구분하고자 한다. 색칠을 하는 방법의 가지 수를 구하면?

① 32 가지 ② 56 가지 ③ 72 가지
④ 96 가지 ⑤ 118 가지

해설

위 지도를 다음 그림과 같이 생각하면,



충북에 색칠하는 방법의 수는 4 (가지)
충남에 색칠하는 방법의 수는 3 (가지)
전북에 색칠하는 방법의 수는 2 (가지)
경기에 색칠하는 방법의 수는 2 (가지)
경북에 색칠하는 방법의 수는 2 (가지)
강원에 색칠하는 방법의 수는 1 (가지)
그러므로 $4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 96$
$\therefore$ 96 가지

4. 집합 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$ 에서 선택한 세 개의 원소 $a_1,\ a_2,\ a_3$ 이 $2a_2 = a_1 + a_3$ 을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$ 이다.)

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$a_1 < a_2 < a_3$ 이고 $2a_2 = a_1 + a_3$ 을 만족하는 순서쌍은 $(2,4,6), (2,6,10), (4,6,8), (4,8,12), (6,8,10)$ $(8,10,12)$ 의 6 가지

5. 다음은 ${}_{10}P_5 = (\boxed{\text{가}}) + (\boxed{(\text{나}})$ 임을 보인 것이다.

> 10개의 숫자 1, 2, 3, $\cdots$, 9,10중에서 서로 다른 5개의 숫자를 뽑아서 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는 ${}_{10}P_5$ 이다.
> 이 때, 다섯 자리의 자연수 중에서 숫자 2가 들어있는 것의 개수는 $(\boxed{\text{가}})$, 숫자 2가 들어 있지 않은 것의 개수는 $(\boxed{\text{나}})$ 이다.
> 따라서 다음 등식이 성립한다.
> ${}_{10}P_5 = (\boxed{\text{가}}) + (\boxed{\text{나}})$

위의 과정에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① ${}_9P_4, 5{}_9P_5$　② $5{}_9P_4$, ${}_9P_5$　③ ${}_9P_4$, ${}_8P_5$
④ ${}_8P_4$, $4{}_9P_5$　⑤ $4{}_9P_4$, ${}_9P_5$

해설

다섯 자리의 자연수 중 2가 들어 있는 것의 개수는 2를 제외한 9개의 숫자중에서
4개를 택하여 나열한 후 2를 추가하면 되므로 ${}_9P_4 \times 5 = 5{}_9P_4$
2가 들어 있지 않은 것의 개수는 2를 제외한 9개의 숫자에서 5개를 택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_9P_5$ 이다.
따라서 ${}_{10}P_5 = 5{}_9P_4 +{}_9 P_5$

6. 남학생 4 명, 여학생 6 명 중에서 반장 1 명, 부반장 1 명을 뽑을 때, 반장, 부반장이 모두 남자인 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: 가지

▷ 정답: 12가지

해설

${}_4P_2 = 12$

7. *cellular* 의 8 개의 문자를 모음끼리 이웃하여 나열하는 방법의 수는?

① 705 ② 720 ③ 735 ④ 750 ⑤ 765

해설

l 이 3 번 반복되고, 모음을 하나로 보면, $\Rightarrow \frac{6!}{3!}$

여기에 모음을 배열하는 방법을 곱한다.

$\therefore \frac{6!}{3!} \times 3! = 720$

8. 여섯 개의 문자 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ 를 일렬로 배열했을 때 $a,\ b$ 가 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는?

① 160　② 180　③ 200　④ 400　⑤ 480

해설

$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ 의 직순열의 경우의 수는 720가지
a 와 b 가 이웃하도록 나열하는 방법
a, b 를 하나로 보면 전체가 5 개가 되고
a, b 의 자리바꿈하는 경우까지 생각하면
$5! \times 2! = 240$ (가지)
따라서 a, b 가 이웃하지 않는 경우의 수는
$720 - 240 = 480$ (가지)

9. a, b, c, d, e의 5개의 문자를 일렬로 나열할 때, c가 d보다 앞에 오게 되는 방법의 수는?

① 24 ② 30 ③ 60 ④ 72 ⑤ 120

해설

c와 d를 같은 문자로 생각하여 5개의 문자를 나열하는 방법과 같다.

$\therefore \dfrac{5!}{2!} = 60$

10. 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 4개를 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 20의 배수가 되는 경우의 수는?

① 12　　② 14　　③ 16　　④ 18　　⑤ 20

해설

4 의 배수와 5 의 배수 판별법을 이용한다. 즉 끝자리가 0 이고 끝의 두 자리가 4 의 배수가 되어야 한다.

$\Rightarrow \boxed{}\boxed{}20$ 또는 $\boxed{}\boxed{}40$

$2 \times {}_3P_2 = 12$

11. 여섯 개의 수 3, 4, 5, 6, 7, 8 에서 서로 다른 두 수 p, q 를 택하여 이차방정식 $px^2 + qx = 0$ 을 만들 때, 만들 수 있는 집합 $A = \{x | px^2 + qx = 0\}$ 의 개수는?

① 22 ② 23 ③ 24 ④ 25 ⑤ 26

해설

6 개의 수 중에서 2 개를 택하여 p, q 에 나열하는 경우의 수를 생각한다.
${}_6P_2 = 6 \times 5 = 30$ 개.
이 중에서 $p = 3, q = 6$ 인 경우와 $p = 4, q = 8$ 인 경우의 해는 같아진다.
따라서 이와 같은 경우를 찾으면,
$p = 6, q = 3$ 과 $p = 8, q = 4$
$p = 3, q = 4$ 과 $p = 6, q = 8$
$p = 4, q = 3$ 과 $p = 8, q = 6$
이므로 구하고자 하는 경우의 수는
$30 - 4 = 26$(개) 이다.

12. 다음 등식을 만족시키는 n 의 값을 구하여라.

${}_{n+2}C_4 = 11{}_nC_2$

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 10$

해설

${}_{n+2}C_4 = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$,

${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$ 이므로 조건식은

$\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \times \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$

$n \geq 2$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$(n+2)(n+1) = 12 \cdot 11$

$\therefore (n-10)(n+13) = 0$

$n + 13 \neq 0$ 이므로 $n - 10 = 0$

$\therefore n = 10$

13. 남학생 4 명과 여학생 6 명 중에서 4 명을 뽑을 때, 남학생과 여학생이 적어도 1 명씩 포함되는 경우는 몇 가지인가?

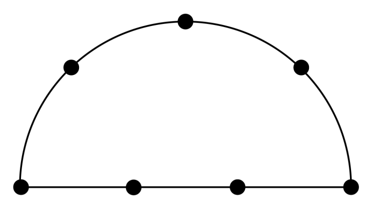
① 105 ② 194 ③ 195 ④ 209 ⑤ 210

해설

전체 경우의 수에서 남학생만 뽑는 경우와 여학생만 뽑게 되는 경우의 수를 뺀다.

${}_{10}C_4 - {}_4C_4 - {}_6C_4 = 194$

14. 다음 그림과 같이 반원 위에 7 개의 점이 있다. 이 중 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는?



① 27 개 ② 28 개 ③ 31 개 ④ 32 개 ⑤ 34 개

해설

전체에서 점 3 개를 고르는 경우에서 밑변 (일직선) 위의 점 중에 3 개를 고르는 경우를 제한다.

${}_7C_3 - {}_4C_3 = 31$

15. 크기와 모양이 다른 9개의 구슬을 4개, 3개, 2개로 나누어 3명의 어린이에게 나누어 주는 방법의 수는?

① 7480 ② 7520 ③ 7560 ④ 7600 ⑤ 7640

해설

${}_9C_4 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 \times 3! = 7560$

16. 2000 의 양의 약수 중 제곱수가 아니면서 짝수인 것의 개수는?

① 4　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 12

해설

$2000 = 2^4 \cdot 5^3$ 의 양의 약수는
$2^j \cdot 5^k (0 \le j \le 4, 0 \le k \le 3)$ 의 형태이다.
그러므로 제곱수가 아니면서 짝수인 것은
$2 \cdot 5^k (k = 0, 1, 2, 3)$
$2^2 \cdot 5^k \ (k = 1,\ 3)$
$2^3 \cdot 5^k \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$
$2^4 \cdot 5^k (k = 1, 3)$ 의 형태이므로
구하는 개수는 $4 + 2 + 4 + 2 = 12$ (개)

17. 2010년 대선에 남자 4명, 여자 3명의 후보자가 나왔다. 후보자들의 합동 토론회가 끝난 후 기념 촬영을 할 때, 다음 두 조건을 만족하도록 일렬로 세우는 경우의 수를 구하여라.

(가) 특정한 남자 후보 2명을 양쪽 끝에 세운다. (나) 남자 후보끼리 나란하지 않도록 세운다.

▶ 답: 가지

▷ 정답: 24가지

해설

양쪽 끝에 특정한 2명의 남자 후보를 세우는 방법의 수는 2가지이고, 나머지 남자 후보 2명과 여자 후보 3명을 남자 후보가 나란하지 않도록 세우는 방법은 $2! \times 3!$ 이므로
구하는 방법의 수는 $2 \times 2! \times 3! = 24$ (가지)

18. 세 자리의 정수 중 0 이 반드시 포함된 세 자리 정수는 모두 몇 가지인가?

① 150 ② 171 ③ 180 ④ 187 ⑤ 210

해설

0 이 반드시 포함된 경우라는 것은 0 이 적어도 하나 포함된 경우로 해석이 가능하므로 여사건을 이용한다.
세 자리 정수이므로 백의 자리에 가능한 수는 9 가지,
십의 자리 수는 10 가지, 일의 자리 수는 10가지 이므로 총 900 가지
여기에서 여사건인 0 이 하나도 포함되지 않는 경우를 빼면 된다.
이것은 세 자리 수 모두 1 에서 9 사이의 수로 구성된 경우이다.
$\therefore 900 - 9^3 = 900 - 729 = 171$

19. 6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5를 모두 사용하여 여섯 자리의 정수를 만들 때, 100번째로 큰 수는?

① 510234 ② 504321 ③ 504312

④ 504231 ⑤ 504213

해설

10^5 자리의 숫자가 5로 시작하는 수부터 차례로 따져보면

$54\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$: $4! = 24$개

$53\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$: $4! = 24$개

$52\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$: $4! = 24$개

$51\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$: $4! = 24$개

여기까지의 수가 $24 \times 4 = 96$(개)이므로

97번째 큰 수부터 차례로 나열하면

504321, 504312, 504231, 504213, $\cdots$

따라서 100번째로 큰 수는 504213이다.

20. A, B 두 사람이 놀이공원에서 'Big3' 라는 입장권을 구입하였다. 이 입장권은 10 개의 놀이기구 중에서 서로 다른 3 개의 놀이기구를 한 번씩만 이용할 수 있다. 놀이기구를 3 번 모두 이용한다고 할 때, A, B 두 사람이 이 입장권으로 놀이기구를 이용할 수 있는 모든 경우의 수는? (단, 놀이기구의 정원은 2 명 이상이며 이용하는 순서는 상관하지 않는다.)

① 840　② 2520　③ 3600
④ 7200　⑤ 14400

해설

10개의 놀이기구 중에서 서로 다른 3개를
택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120(\text{가지})$$

따라서, A, B 두 사람이 이용할 수 있는 경우는
각각 120가지이므로 구하는경우의 수는
$120 \times 120 = 14400$

21. 집합 S_1, S_2, S_3 은 다음과 같다.

$S_1 = \{1, 2\}$

$S_2 = \{1, 2, 3, 4\}$

$S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

집합 S_1 에서 한 개의 원소를 선택하여 백의 자리의 수, 집합 S_2 에서 한 개의 원소를 선택하여 십의 자리의 수, 집합 S_3 에서 한 개의 원소를 선택하여 일의 자리의 수로 하는 세 자리의 수를 만들 때, 각 자리의 수가 모두 다른 세 자리의 개수는?

① 8　② 12　③ 16　④ 20　⑤ 24

해설

각 자리의 수가 모두 다른 세 자리의 수를 만들려면 백의 자리에는 집합 S_1 의 원소 2 개 중 하나를 선택하고 십의 자리에는 집합 S_2 의 원소 중 백의 자리에서 사용한 수를 제외한 3개의 수 중 하나를 선택한다.
마찬가지로 일의 자리에는 집합 S_3 의 원소 중 백의 자리와 십의 자리에서 사용한 수를 제외한 4 개의 수 중 하나를 선택한다.
따라서, 구하는 세 자리의 수의 개수는
${}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_4C_1 = 24$

22. 2000보다 작은 네 자리의 자연수 중에서 각 자리의 숫자 중 두 개만 같은 자연수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 432 개

해설

$1\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ 인 네자리 자연수에서
같은 두수가 1 인 수의 개수는
${}_3C_1 \times {}_9P_2 = 216$
같은 두수가 1 이 아닌 수의 개수는
${}_9C_1 \times {}_3C_2 \times {}_8C_1 = 216$ 이므로
구하고자 하는 자연수의 개수는 432 개

23. 아시아 4 개국과 아프리카 4 개국이 있다. 8 개국을 2 개국씩 짝지어 4 개의 그룹으로 나누려고 한다. 적어도 한 개의 그룹이 아시아 국가만으로 이루어지도록 4 개의 그룹으로 나누는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 81 가지

해설

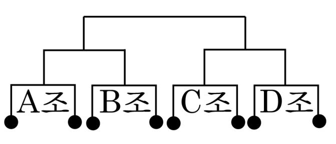
적어도 한 그룹이 아시아 국가만으로 이루어지는 사건의 여사건은 아시아 국가만으로 이루어진 그룹이 하나라도 있으면 안 되므로, 아시아 1 개국과 아프리카 1 개국으로 모든 그룹이 이루어진다.

$$\therefore {}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{4!}$$

$$- \left\{ ({}_4C_1 \times {}_4C_1) \times ({}_3C_1 \times {}_3C_1) \times ({}_2C_1 \times {}_2C_1) \times ({}_1C_1 \times {}_1C_1) \times \frac{1}{4!} \right\}$$

$$= \frac{28 \times 15 \times 6}{4 \times 3 \times 2} - \frac{16 \times 9 \times 4}{4 \times 3 \times 2} = 105 - 24 = 81$$

24. 전국 규모의 대회에서 우승한 역대 우승자 8명을 초대하여 아래 그림과 같은 토너먼트 형식으로 테니스 최강자를 가리려 한다. 이때, 선수들을 각 조에 배정하는 방법의 수는?



▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 2520 가지

해설

8명을 2명씩 4팀으로 나누는 방법의 수는

${}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{4!}$

또, 이들 4팀을 A조, B조, C조, D조로 구분하는 것은 4개를 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로 $4!$이다. 따라서 구하는 방법의 수는

${}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{4!} \times 4!$

$= \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} = 2520$

25. 토정비결에서는 다음 조건에 맞는 3개의 수 A, B, C로 각 사람의 그 해의 운세 $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}$를 결정한다.

(1) A는 태어난 해에 해당하는 수를 3으로 나눈 나머지 (2) B는 태어난 달에 해당하는 수를 6으로 나눈 나머지 (3) C는 태어난 날에 해당하는 수를 8로 나눈 나머지

토정비결에 있는 서로 다른 운세 $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}$는 모두 몇 가지인가? (단, 나머지가 0인 경우에는 나누는 수를 나머지로 한다)

① 64가지　② 144가지　③ 127가지
④ 216가지　⑤ 254가지

해설

A는 1, 2, 3 총 3가지, B는 1부터 6까지 총 6가지, C는 1부터 8까지 총 8가지
따라서 총 가지 수는 $3 \times 6 \times 8 = 144$가지