1. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $\triangle$, $\blacktriangledown$를 $A\triangle B = 2A + B$, $\mathrm{A}\blacktriangledown B = A - 3B$로 정의한다.
$A = 2 + 3x^2 - x^3$, $B = x^2 + 3x + 1$일 때 $A\blacktriangledown(B\triangle A)$를 구하면?

① $2x^3 - 18x - 10$

② $2x^3 - 12x^2 - 18x - 10$

③ $2x^3 + 12x^2 + 18x + 10$

④ $2x^3 + 12x^2 + 18x - 10$

⑤ $2x^3 - 12x^2 + 18x + 10$

해설

$$\begin{aligned} A\blacktriangledown(B\triangle A) &= A\blacktriangledown(2B + A) \\ &= A - 3(2B + A) = -2A - 6B \end{aligned}$$

위와 같이 식을 간단히 정리한 후 A, B에 대입하여 정리한다.

2. 다음은 연산법칙을 이용하여 $(x+3)(x+2)$를 계산한 식이다.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2\\ &= (x^2+3x)+(2x+6)\\ &= x^2+(3x+2x)+6\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

위의 연산과정에서 사용한 연산법칙을 바르게 고른 것은?

① 교환법칙, 결합법칙

② 교환법칙, 분배법칙

③ 분배법칙, 결합법칙

④ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙

⑤ 연산법칙을 사용하지 않았다.

해설

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 && \text{(분배)}\\ &= (x^2+3x)+(2x+6) && \text{(분배)}\\ &= x^2+(3x+2x)+6 && \text{(결합)}\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

3. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, $xf(x)-3$을 $x+1$로 나눈 몫과 나머지는?

① $xQ(x), -R-3$

② $xQ(x), -R+3$

③ $xQ(x), -R-6$

④ $xQ(x)+R, -R-3$

⑤ $xQ(x)+R, -R+3$

해설

$f(x)=(x+1)Q(x)+R$

$\therefore\ xf(x)=x(x+1)Q(x)+xR$

$$\begin{aligned}\therefore\ xf(x)-3 &= x(x+1)Q(x)+xR-3\\ &= (x+1)\left\{xQ(x)\right\}+(x+1)R-R-3\\ &= (x+1)\left\{xQ(x)+R\right\}-R-3\end{aligned}$$

4. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c=2$, $a^2+b^2+c^2=6$, $abc=-1$ 일 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^3+2(ab+bc+ca)$

$ab+bc+ca=-1$

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=2\times(6-(-1))-3=11$

5. $(x^3+2x^2-3x+2)^4(2x-1)^7$ 을 전개했을 때, 모든 계수들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x^3+2x^2-3x+2)^4\cdot(2x-1)^7$
$=a_0x^{19}+a_1x^{18}+a_2x^{17}+\cdots+a_{19}$ 로 놓으면
계수들의 총합 $a_0+a_1+\cdots+a_{19}$ 는 양변에 $x=1$ 을 대입한 결과와 같으므로 항등식의 성질에서
$(1+2-3+2)^4\cdot(2-1)^7=2^4=16$

6. 다항식 $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 2$ 를 $x-1$ 로 나누면 나누어떨어지고, $x+1$ 로 나누면 나머지가 2 라고 한다. mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(1) = 1 + m + n + 2 = 0$, $m + n = -3$
$f(-1) = -1 + m - n + 2 = 2$, $m - n = 1$
두 식을 연립하여 풀면 $m = -1$, $n = -2$
$\therefore\ mn = 2$

7. 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나누면 떨어지고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이때, $P(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때 나머지는?

① x　　② $-x+1$　　③ $x+1$

④ $-2x+2$　　⑤ $2x+2$

해설

$P(x) = (x+1)Q(x)$
$P(x) = (x-2)Q'(x) + 3$
$P(x) = (x+1)(x-2)Q''(x) + ax + b$
$P(-1) = 0,\quad P(2) = 3$이므로,
$-a + b = 0,\quad 2a + b = 3$
$\therefore\ a = 1,\ b = 1$
따라서 나머지는 $x+1$이다.

8. $f(x)$를 $x-1$로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x+1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q(x)+3 \\ &= (x-1)\{(x+3)Q'(x)+2\}+3 \\ &= (x-1)(x+3)Q'(x)+2(x-1)+3 \\ &= (x^2+2x-3)Q'(x)+2x+1 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

9. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+x=A$ 로 치환하면

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$=(A-2)(A-12)+24$

$=A^2-14A+48=(A-6)(A-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

$\therefore\ a+b+c-d=-2+3+1-(-8)=10$

10. $a^2-b^2-c^2+2bc$의 인수가 아닌 것은?

① $a-b+c$　② $a+b-c$　③ $-a+b-c$
④ $-a+b+c$　⑤ $-a-b+c$

해설

$$\begin{aligned} a^2-b^2-c^2+2bc &= a^2-(b^2+c^2-2bc) \\ &= a^2-(b-c)^2 \\ &= (a+b-c)(a-b+c) \end{aligned}$$

인수 : $(a+b-c)$, $(a-b+c)$(단, 복부호 동순)

11. x에 대한 두 다항식 $A = x^2 + 3x + k$, $B = x^2 + x - k$의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 k의 값은? (단, $k \neq 0$)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$A - B = 2x + 2k = 2(x + k)$
A, B의 최대공약수는 $A - B$의 인수이므로
A, B의 최대공약수를 G라 하면
G는 일차식이므로 $G = x + k$
$x + k$는 A의 인수이어야 하므로
$(-k)^2 + 3(-k) + k = 0$
$\therefore\ k = 0$ 또는 $k = 2$
그런데 주어진 조건에서 $k \neq 2$이므로 $k = 2$

12. $a = (1+i)^n$ 을 양의 실수가 되게 하는 최소의 자연수 n 의 값과 그 때의 a 의 값의 합을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$(1+i)^n = \{(1+i)^2\}^{\frac{n}{2}} = (2i)^{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{n}{2}} \cdot i^{\frac{n}{2}}$

$i^{\frac{n}{2}}$ 이 양의 실수가 되는 최소의 n의 값은 $i^4 = 1$ 이므로 $\frac{n}{2} = 4$

$\therefore\ n = 8$

$\therefore\ a = (2i)^4 = 16$

$\therefore\ n = 8,\ a = 16$

$\therefore\ n + a = 24$

13. 복소수 z 에 대하여 $3z+\overline{z}(1+i)=3-i$ 가 성립할 때, $z\overline{z}$ 의 값은?

① -3 ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 2 ⑤ 4

해설

$z=a+bi$ $(a,\ b$ 는 실수$)$ 로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$
이것을 주어진 식에 대입하면
$3(a+bi)+(a-bi)(1+i)=3-i$
$3a+3bi+a+ai-bi+b=3-i$
$(4a+b)+(a+2b)i=3-i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $4a+b=3$, $a+2b=-1$

$$\begin{cases} 4a+b=3 & \cdots ㉠ \\ a+2b=-1 & \cdots ㉡ \end{cases}$$ 에서

㉠ $\times 2-$ ㉡ 을 하면 $7a=7$,
$\therefore\ a=1$
$a=1$ 을 ㉠에 대입하면 $b=-1$
따라서 $z=a+bi=1-i$ 이므로 $z\overline{z}=(1-i)(1+i)=2$

14. 이차방정식 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ 의 한 근이 1 일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

1 이 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ 의 근이므로
$x = 1$ 을 대입하면 $1 + m + m - 1 = 0 \quad \therefore m = 0$
주어진 방정식은 $x^2 - 1 = 0 \quad \therefore x = \pm 1$
따라서 다른 한 근은 $x = -1$

15. x에 대한 다음 방정식의 두 근의 합은?

$$(\sqrt{3}+1)x^2+(\sqrt{3}+1)x-2\sqrt{3}=0$$

① $-\sqrt{3}$　② -1　③ 0　④ 1　⑤ $\sqrt{3}$

해설

주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

$\{(\sqrt{3}+1)x-2\}(x+\sqrt{3})=0$

$\therefore\ x=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

$\therefore\ x=\sqrt{3}-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

$\therefore\ \sqrt{3}-1+(-\sqrt{3})=-1$

16. 등식 $\dfrac{2x^2+13x}{(x+2)(x-1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x+2}$ 가 x에 대한 항등식이 되도록 상수 $A,\ B,\ C$의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값은?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

양변에 $(x+2)(x-1)^2$을 곱하면

$2x^2+13x=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$에서

$x=1,\ -2,\ 0$을 차례로 대입하여 $A,\ B,\ C$를 구하면

$B=5,\ C=-2,\ A=4$

$\therefore\ A+B+C=7$

17. $x^4+4y^4=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$ 을 이용하여 다음 식의 값을 구하면?

$$\frac{(11^4+324)(23^4+324)(35^4+324)(47^4+324)}{(5^4+324)(17^4+324)(29^4+324)(41^4+324)}$$

① 192　② 193　③ 194　④ 195　⑤ 196

해설

$x^4+4y^4=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$

$=\{(x-y)^2+y^2\}\{(x+y)^2+y^2\}$ 이고,

$324=4\times3^4$ 이므로

$11^4+324=(11^2-2\times11\times3+2\times3^2)(11^2+2\times11\times3+2\times3^2)$

$=\{(11-3)^2+3^2\}\{(11+3)^2+3^2\}$

$=(8^2+3^2)(14^2+3^2)$

따라서 차례대로 모두 정리해 보면 주어진 식은

$$\frac{\{(8^2+3^2)(14^2+3^2)\}\{(20^2+3^2)(26^2+3^2)\}}{\{(2^2+3^2)(8^2+3^2)\}\{(14^2+3^2)(20^2+3^2)\}}$$

$$\frac{\{(32^2+3^2)(38^2+3^2)\}\{(44^2+3^2)(50^2+3^2)\}}{\{(26^2+3^2)(32^2+3^2)\}\{(38^2+3^2)(44^2+3^2)\}}$$

$$=\frac{50^2+3^2}{2^2+3^2}=\frac{2509}{13}=193$$

18. $a,\ b$는 양수라 할 때, 다음 중 $z = a(1+i) + b(1-i), i = \sqrt{-1}$의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $1-3i$　② $2+3i$　③ $4-2i$　④ $-3+2i$　⑤ $2-5i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)\,i$ (a, b 는 양수)

① $1-3i$ 에서 $a+b=1,\ a-b=-3$

$a=-1,\ b=2 \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

② $2+3i$ 에서 $a+b=2,\ a-b=3$

$a=\frac{5}{2},\ b=-\frac{1}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

③ $4-2i$ 에서 $a+b=4,\ a-b=-2$

$a=1,\ b=3 \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건을 만족시킴

④ $-3+2i$ 에서 $a+b=-3,\ a-b=2$

$a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{5}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

⑤ $2-5i$ 에서 $a+b=2,\ a-b=-5$

$a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{7}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

19. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{14}$ 의 값은?

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 $2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0, \alpha^3 = 1$

$\therefore\ \alpha^{3k+1} = \alpha, \alpha^{3k+2} = \alpha^2, \alpha^{3k} = 1$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (\alpha + \alpha^2 + 1) + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \\ &\quad \cdots + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \alpha + \alpha^2 \\ &= \alpha + \alpha^2 \\ &= -1\end{aligned}$$

$(\because\ \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$

20. 방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\alpha^2+5\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)$의 값은?

① -2 ② -4 ③ -8 ④ -14 ⑤ -17

해설

방정식 $x^2+3x+1=0$의 근이 α, β이므로
$\alpha^2+3\alpha+1=0$, $\beta^2+3\beta+1=0$
$\alpha^2+1=-3\alpha$, $\beta^2+1=-3\beta$
$\therefore$ $(\alpha^2+5\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)$
$=(-3\alpha+5\alpha)(-3\beta-4\beta)$
$=-14\alpha\beta$
근과 계수와의 관계에서 $\alpha\beta=1$이므로
(주어진 식)$=-14$

21. 이차방정식 $f(2x+1)=2$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=4$가 성립한다. 이 때, $3f(x)-2=4$의 두 근의 합은?

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

해설

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$f(2x+1)=a(2x+1)^2+b(2x+1)+c=2$

$\therefore a(4x^2+4x+1)+b(2x+1)+c-2=0$

$4ax^2+4ax+a+2bx+b+c-2=0$

$4ax^2+(4a+2b)x+a+b+c-2=0$

따라서 두 근의 합 $\alpha+\beta=\dfrac{-(4a+2b)}{4a}=4$

$\therefore 4a+2b=-16a,\ \ 2b=-20a$이므로

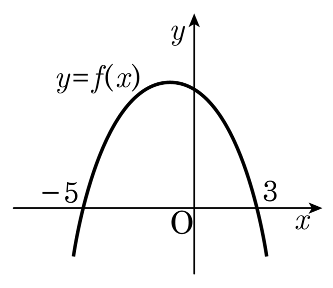
$b=-10a$

$3f(x)-2=4$이므로 $3f(x)=6$

$\therefore f(x)=2 \quad \therefore ax^2+bx+c-2=0$에서

두 근의 합 $\alpha'+\beta'=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-10a}{a}=10$

22. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right)=0$ 의 두 근의 합은?



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(x)=a(x+5)(x-3)$ $(a<0)$ 으로 놓으면

$$f\left(\frac{x-4}{2}\right)=a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right)=\frac{a}{4}(x+6)(x-10)$$
이므로

$\frac{a}{4}(x+6)(x-10)=0$ 에서

$x=-6$ 또는 $x=10$

따라서 방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right)=0$ 의 두 근의 합은 4

23. 두 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 - 4x - y - 2 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2 + y^2 - 4x - y - 2 = 0$ 을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2 - 4x + y^2 - y - 2 = 0$
이 때, x 가 실수이므로 판별식 D 라 하면
$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (y^2 - y - 2) \geq 0$
$y^2 - y - 6 \leq 0$, $(y+2)(y-3) \leq 0$
$\therefore -2 \leq y \leq 3$ 따라서, y 의 최댓값은 3 이다.

24. 태은이네 가게에서 판매하고 있는 상품의 1개당 판매가격을 원래의 가격보다 x% 올리면 이 상품의 판매량은 $\frac{2}{3}x$% 감소한다고 한다. 이때, 판매 금액이 최대가 되게 하는 x의 값은?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

원래의 상품1개당 판매 가격을 a원, 판매량을 b개라 하자.
가격을 x% 올리면 상품 1개당 판매 가격이
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원, 판매량이 $b\left(1-\frac{2x}{300}\right)$개이므로
판매 금액은

$$ab\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{2x}{300}\right)$$
$$=ab\cdot\frac{100+x}{100}\cdot\frac{300-2x}{300}$$
$$=\frac{ab}{30000}(100+x)(300-2x)$$
$$=\frac{ab}{30000}(-2x^2+100x+30000)$$
$$=\frac{ab}{30000}\{-2(x-25)^2+31250\}$$

따라서 $x=25(\%)$ 일 때 판매 금액은 최대가 된다.

25. 세 방정식 $x^2+2ax+bc=0,\ x^2+2bx+ca=0,\ x^2+2cx+ab=0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, $a,\ b,\ c$는 실수)

① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.

② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.

③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.

④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.

⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$\dfrac{D_1}{4}=a^2-bc,$

$\dfrac{D_2}{4}=b^2-ca,$

$\dfrac{D_3}{4}=c^2-ab$라 하면

$\dfrac{D_1}{4}+\dfrac{D_2}{4}+\dfrac{D_3}{4}$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\dfrac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geq 0$

따라서, $\dfrac{D_1}{4},\ \dfrac{D_2}{4},\ \dfrac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.