1. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(2)$, $\mathrm{Q}(x)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = 3$이고, x의 값을 α, β라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

i) $x > 2$일 때, $x - 2 = 3 \therefore x = 5$

ii) $x < 2$일 때, $2 - x = 3 \therefore x = -1$

따라서 α, β의 값은 -1 또는 5

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 26$

2. 두 점 $A(-2,\ 0)$, $B(7,\ 0)$에서 $\overline{AB}$ 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점 P 와 외분하는 점 Q 의 좌표는?

① $P(4,\ 0),\ Q(16,\ 0)$
② $P(2, 0),\ Q(-16, 0)$
③ $P(4, 0),\ Q(-8, 0)$
④ $P(4, 0),\ Q(4, 0)$
⑤ $P(-4, 0),\ Q(16, 0)$

해설

내분점 P 의 좌표는

$$P\left(\frac{-2\times1+7\times2}{2+1}, \frac{0\times1+0\times2}{2+1}\right)$$

$\therefore\ P(4,\ 0)$

외분점 Q 의 좌표는

$$Q\left(\frac{2\times1+7\times2}{2-1}, \frac{-0\times1+0\times2}{2-1}\right)$$

$\therefore\ Q(16,\ 0)$

3. 세 점 A$(-3,\ 2)$, B$(4,\ 2)$, C$(2,\ 8)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는?

① $(0,\ 4)$ ② $(2,\ 3)$ ③ $(2,\ 4)$
④ $(1,\ 3)$ ⑤ $(1,\ 4)$

해설

$$\left(\frac{-3+4+2}{3},\ \frac{2+2+8}{3}\right)=(1,\ 4)$$

4. 네 점 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(-3,0), \mathrm{B}(4,0), \mathrm{C}(2,5)$ 에 대하여 삼각형 AOC 의 넓이는 삼각형 BOC 의 넓이의 몇 배인가?

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\triangle$AOC 와 $\triangle$BOC 의 높이가 같으므로
$\triangle$AOC 와 $\triangle$BOC 의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 비와 같다.
$\overline{\mathrm{AO}} : \overline{\mathrm{BO}} = 3 : 4$ 이므로 $\triangle$AOC 의 넓이는 $\triangle$BOC 의 넓이의 $\frac{3}{4}$ 배이다.

5. 세 점 $(0,\ 2)$, $(3,\ 8)$, $(a,\ 3a)$ 가 일직선 위에 있을 때, 상수 a 의 값은?

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 4

해설

세 점 $A(0,\ 2)$, $B(3,\ 8)$, $C(a,\ 3a)$ 로 놓으면

직선 AB 의 기울기 : $\dfrac{8-2}{3-0}=2$

직선 BC 의 기울기 : $\dfrac{3a-8}{a-3}$

한편, 세 점 A, B, C 가 일직선 위에 있으므로

직선 AB 의 기울기와 직선 BC 의 기울기가 서로 같다.

$\dfrac{3a-8}{a-3}=2,\ 3a-8=2a-6$

$\therefore a=2$

6. 다음<보기> 중 직선 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 과 서로 수직인 직선을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $y = 2x + 1$ ㉡ $y = -2(x - 1)$

㉢ $y = -2x + 3$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이므로

직선 $y\ \frac{1}{2}x + 1$ 과 수직인 직선의 기울기는 -2 이다.

기울기가 -2 인 직선은 ㉡, ㉢이다.

7. 세 직선 $2x+3y-4=0$, $3x-y+5=0$, $5x+2y+k=0$ 이 한 점에서 만나도록 상수 k 의 값을 정하면?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면
직선 $5x+2y+k=0$ 이 두 직선
$2x+3y-4=0$, $3x-y+5=0$ 의 교점을 지나야 한다.
두 직선 $2x+3y-4=0$, $3x-y+5=0$ 의 교점이 $(-1, 2)$ 이므로
$x=-1,\ y=2$를 $5x+2y+k=0$ 에 대입하면
$5\cdot(-1)+2\cdot 2+k=0$
$\therefore\ k=1$

8. 방정식 $x^2+y^2-2x+4y+4=0$ 이 나타내는 도형을 바르게 설명한 것을 고르면?

① 중심 $(1,\ 2)$ 이고 반지름이 1 인 원
② 중심 $(1,\ -2)$ 이고 반지름이 1 인 원
③ 중심 $(-1,\ 2)$ 이고 반지름이 1 인 원
④ 중심 $(1,\ -2)$ 이고 반지름이 2 인 원
⑤ 중심 $(1,\ 2)$ 이고 반지름이 2 인 원

해설

$x^2+y^2-2x+4y+4=0$
$\Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=1$
$\therefore$ 중심은 $(1,-2)$ 이고, 반지름이 1 인 원

9. 좌표평면에서 $(-5,\ 0)$과 $(25,\ 0)$을 지름의 양 끝으로 하는 원이 있다. $(x,\ 15)$가 원 위의 점일 때, x는?

① 10　② 12.5　③ 15　④ 17.5　⑤ 20

해설

두 점 $(-5, 0)$과 $(25, 0)$의 중점 $(10, 0)$이 중심이고
반지름은 15인 원이므로
$(x-10)^2 + y^2 = 225$
$(x, 15)$가 이 방정식을 만족시키므로 대입하면,
$(x-10)^2 + 15^2 = 225 \quad \therefore \ x = 10$

10. 두 점 A$(-3, 2)$, B$(4, 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표는?

① $(-3,\ 0)$　② $(1,\ 0)$　③ $(2,\ 0)$
④ $(-1,\ 0)$　⑤ $(5,\ 0)$

해설
x축 위의 점을 P$(x, 0)$라 하면
$\overline{PA} = \overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$이므로
$(x+3)^2 + (0-2)^2 = (x-4)^2 + (0-5)^2$
$14x = 28$
따라서 $x = 2$ 즉, P$(2,\ 0)$

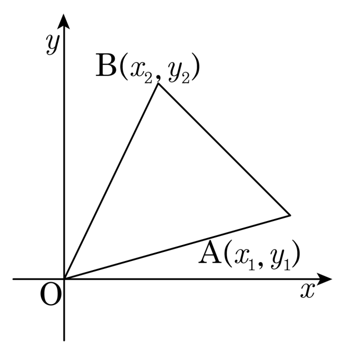
11. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 인 $\triangle ABC$가 $\angle A$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle ABC$에서 $\angle A$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$에 대하여
$\overline{AB}^2 = (-1-a)^2 + (-5-3)^2 = a^2 + 2a + 65$
$\overline{CA}^2 = (a-3)^2 + (3-7)^2 = a^2 - 6a + 25$
$\overline{BC}^2 = (3+1)^2 + (7+5)^2 = 160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2 - 4a + 90 = 160$
$\therefore\ a^2 - 2a - 35 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

12. 원점 O(0, 0)와 두 점 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$로 이루어진 삼각형 OAB의 넓이는?



① $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$　② $\frac{1}{2}|x_1y_1 - x_2y_2|$　③ $\frac{1}{2}|x_1y_1 + x_2y_2|$
④ $\frac{1}{2}|x_1x_2 - y_1y_2|$　⑤ $\frac{1}{2}|x_1x_2 + y_1y_2|$

해설

$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

직선 OA의 방정식은 $y = \frac{y_1}{x_1}x$

$\therefore\ y_1x - x_1y = 0$

점 B$(x_2,\ y_2)$에서

직선 $y_1x - x_1y = 0$까지의 거리 h는

$\frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$이다.

$\therefore\ \triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot h$

$= \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$

$= \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$

13. 세 점 A$(-1,\ 0)$, B$(2,\ -3)$, C$(5,\ 3)$에 대하여 등식 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=2\overline{\mathrm{CP}}^2$을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax+y+b=0$이다. 이 때, $a+b$의 값은?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 하면
주어진 조건에서,
$(x+1)^2+y^2+(x-2)^2+(y+3)^2$
$=2\{(x-5)^2+(y-3)^2\}$
$2x^2-2x+2y^2+6y+14$
$=2(x^2-10x+y^2-6y+34)$
$18x+18y-54=0$
$\Rightarrow\ \ x+y-3=0$
$\therefore\ a+b=1+(-3)=-2$

14. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.
그 점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a<0, b<0$)

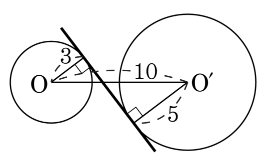
$$(x^2+y^2+2x+3y-1)m+(x^2+y^2+2x+2y-3)=0$$

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.
$x^2+y^2+2x+3y-1=0$,
$x^2+y^2+2x+2y-3=0$
연립하여 풀면 $(x, y)=(-3,-2),(1,-2)$
그러므로 $(a, b)=(-3,-2)$

15. 다음 그림의 두 원 O와 O′에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3+5)^2} = 6$

16. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답: ＿＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답: 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

17. 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(2,\ 3)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면?

① $2x+3y+13=0$
② $2x+3y-13=0$
③ $3x+2y+13=0$
④ $3x+2y-13=0$
⑤ $3x-2y-13=0$

해설

$(2,\ 3)$이 원 위의 점이므로
$2\cdot x+3\cdot y=13$
$\therefore 2x+3y-13=0$

18. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 기울기가 1 인 접선의 방정식은 $y = x \pm$ (　　　) 이다. (　　　)안의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$　　② $2\sqrt{2}$　　③ $3\sqrt{2}$　　④ $4\sqrt{2}$　　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

직선과 원이 접하면 원의 중심에서 직선에 이르는 거리는 반지름과 같다.

$y = x + k$ 라 하면

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2,\ \ k = \pm 2\sqrt{2}$$

$\therefore\ \ y = x \pm 2\sqrt{2}$

19. 두 정점 $A(1,\ 2)$, $B(-3,\ 0)$으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취의 방정식은?

① $y = 2x + 1$　　② $y = 2x - 1$　　③ $y = -2x + 1$

④ $y = -2x - 1$　　⑤ $y = -x + 2$

해설

구하는 점을 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$

양변을 제곱해서 정리하면

$-8x - 4y - 4 = 0,\ -4y = 8x + 4$

$\therefore\ y = -2x - 1$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는 선분의 수직이등분이다.

$\overline{AB}$ 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

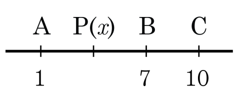
$\overline{AB}$ 의 수직이등분선은 기울기는 -2 이고

$\overline{AB}$ 의 중점$(-1,\ 1)$ 을 지난다.

$\therefore\ y - 1 = -2(x + 1)$

$\therefore\ y = -2x - 1$

20. 수직선 위의 세 점 A(1), B(7), C(10) 과 동점 P(x) 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$ 이 최소가 되는 점 P 의 좌표를 구하면?

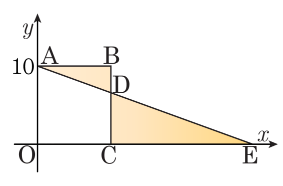


① P(5)　② P(6)　③ P(7)　④ P(8)　⑤ P(9)

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$
$= (x-1)^2 + (x-7)^2 + (x-10)^2$
$= 3(x-6)^2 + 42$
따라서, $x = 6$ 일 때 최소가 된다.

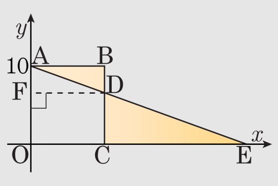
21. 다음 그림과 같은 정사각형 OABC 가 있다. 변 BC 위의 B, C 가 아닌 한 점 D 를 지나는 직선 AD 를 그을 때, 색칠된 부분의 넓이가 사다리꼴 OADC 의 넓이와 같다면 직선 AD 의 기울기는?



① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

다음 그림과 같이 점 D 에서 y 축에 내린 수선의 발을 F 라 하면



$\triangle ADB = \triangle AFD$ 이므로

$\square OCDF = \triangle DCE$

즉, $\overline{OC} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CE} \cdot \overline{CD}$

$\therefore\ \overline{CE} = 2\overline{OC}$

E$(30, 0)$ 이므로 직선 AD 의 기울기는 $-\frac{1}{3}$

22. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$ 을 지나는 직선의 x 절편을 A, y 절편을 B, 원점을 O 라 할 때, $\triangle$OAB 의 면적을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$ 를 지나는 직선은

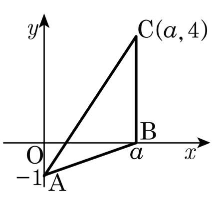
$y = \dfrac{-2-(-3)}{4-2}(x-2)-3 = \dfrac{1}{2}x-4$

$\Rightarrow$ x 절편은 8 이고, y 절편은 -4 이다.

$\therefore$ $\triangle$OAB 의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$ 이다.

23. 다음 그림과 같이 점 A$(0,\ -1)$, B$(a,\ 0)$, C$(a,\ 4)$를 꼭지점으로 하는 ABC가 있다. 점 B를 지나면서 $\triangle$ABC의 넓이를 이등분하는 직선이 존재할 때, 직선의 방정식은?



① $y=-\frac{4}{a}x+4$ ② $y=-\frac{3}{a}x+3$ ③ $y=-\frac{2}{a}x+2$
④ $y=-\frac{2}{a}x+1$ ⑤ $y=-\frac{1}{a}x+4$

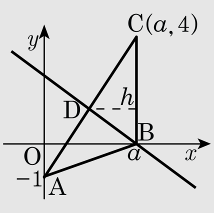
해설

$\triangle$ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{OB}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot a=2a$

점 B를 지나면서 $\triangle$ABC의 넓이를 이등분하는 직선과 $\overline{AC}$ 와의 교점을 D,

$\triangle$BCD에서 $\overline{BC}$를 밑변으로 보았을 때 높이를 h 라 하면



($\triangle$BCD의 넓이) $=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot h=2h$

이 넓이는 $\triangle$ABC의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$2h=a \qquad \therefore h=\frac{a}{2}$

따라서 점 D의 x좌표는 $a-\frac{a}{2}=\frac{1}{2}a$

$\therefore$ D의 좌표는 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

두 점 B$(a, 0)$, D$\left(\frac{a}{2},\ \frac{3}{2}\right)$를 지나는

직선의 방정식은 $y-0=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{a}{2}-a}(x-a)$

$\therefore y=-\frac{3}{a}x+3$

24. 점 O(0, 0), A(4, 2) 를 잇는 선분 OA 의 수직이등분선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라고 할 때, $m^2 + n^2$ 의값을 구하면?

① 20　　② 29　　③ 30　　④ 39　　⑤ 49

해설

수직이등분선은 $\overline{\mathrm{OA}}$ 기울기에 수직하고 $\overline{\mathrm{OA}}$ 의 중점은 수직이등분선 위에 있다.

i) $\overline{\mathrm{OA}}$ 의 기울기 : $\frac{1}{2}$

수직이등분선의 기울기 : -2

ii) $\overline{\mathrm{OA}}$ 의 중심 : $(2, 1)$

$\therefore \quad y = -2(x-2) + 1 = -2x + 5$

$\Rightarrow \quad m^2 + n^2 = 29$

25. 좌표평면 위의 세 점 O(0, 0), A(4, 3), B(2, 6) 을 꼭지점으로 하는 삼각형 OAB 의 무게중심을 G 라 할 때, 점 G 와 직선 OA 사이의 거리는?

① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

해설

삼각형 OAB 의 무게중심은 G(2,3) , 직선 OA 의 방정식은 $y = \frac{3}{4}x$ 곧 $3x - 4y = 0$ 이다.

따라서 점 G 와 직선 OA 의 거리 d 는

$$d = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{6}{5}$$

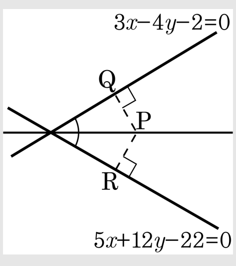
26. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라. (단, a는 양수, a, b, c는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm 5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

27. 두 원 $x^2+y^2=2$과 $(x-a)^2+(y-a)^2=2$이 만나지 않을 때, 실수 a의 값의 범위는 $a<p$ 또는 $a>q$이다. 이때, $p+q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

두 원 $x^2+y^2=2$, $(x-a)^2+(y-a)^2=2$는 만나지 않는다.
즉, 두 원이 서로 외부에 있거나 한 원이 다른 원의 내부에 있어야 하는데, 두 원의 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{2}$이므로 한 원이 다른 원의 내부에 있을 수는 없다. 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,\ 0)$, $(a,\ a)$이므로 중심거리는

$\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}|a|$

따라서 두 원이 서로 외부에 있으려면

$\sqrt{2}|a|>\sqrt{2}+\sqrt{2}$, $|a|>2$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>2$

28. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2+y^2=4, \quad y=x+3$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 중심 $(0,0)$ 에서 직선 $y=x+3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$d=\dfrac{|3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

이때, $d=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}>2=r$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

29. 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 접하려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.

$\Rightarrow$ 중심 : $(0,\ 0)$ 직선 : $x + y - k = 0$

$$\frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ $k = \pm 2$

$\therefore$ $k = -2$ ($\because$ $k < 0$)

30. 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 m이라고 하면
접선은 $y+1=m(x-3)\cdots$ ①
따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선
$mx-y-3m-1=0$과의 거리가
원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.
$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하면
$9m^2+6m+1=5m^2+5$, $4m^2+6m-4=0$
따라서, 기울기 $m=\frac{1}{2}, -2$
여기서 기울기가 음수인 -2를 ①에 대입하면
$y=-2x+5$
따라서 y절편은 5이다.