

1. 모든 실수 x 에 대하여 다음 분수식 $\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$ 가 항상 성립하도록 상수 a, b, c 의 값을 정할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

주어진 식의 우변을 통분하면

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{a(x+2)^2 + b(x+1)(x+2) + c(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$\therefore 1 = a(x+2)^2 + b(x+1)(x+2) + c(x+1)$$

이것이 x 에 대한 항등식이어야 하므로

양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $1 = a$

$x = -2$ 를 대입하면 $1 = -c$

즉, $c = -1$

$x = 0$ 을 대입하면 $1 = 4a + 2b + c$

$a = 1, c = -1$ 이므로 $1 = 4 + 2b - 1$

$\therefore b = -1$

$\therefore a + b + c = 1 - 1 - 1 = -1$

2. $\frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2}$ 이고, $\frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p + q$ 의 값을 구하여라. (단, $abc \neq 0$, p, q 는 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : $p + q = 32$

해설

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2} = k (k \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$a = 4k, \quad b = 3k, \quad c = 2k$$

$$\therefore \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{11}{21}$$

$$\therefore p + q = 11 + 21 = 32$$

3. $2x - y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$ 일 때, $\frac{5x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값은?

- ① $\frac{5}{7}$
- ② $\frac{7}{5}$
- ③ $\frac{3}{7}$
- ④ $\frac{7}{3}$
- ⑤ 1

해설

$2x - y + z = 0 \cdots \textcircled{1}$

$x - 2y + 3z = 0 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2$ 에서 정리하면

$y = \frac{5}{3}z$

$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2}$ 에서 정리하면

$x = \frac{1}{3}z$

$\therefore x : y : z = \frac{1}{3}z : \frac{5}{3}z : z$

$= 1 : 5 : 3$

$x = 1$, $y = 5$, $z = 3$ 을 대입하면

(준식) $= \frac{5 - 5 + 25}{1 + 25 + 9} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$

4. 다음 그래프 중 평행이동에 의하여 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은?

① $y = \frac{x+1}{x-1}$

② $y = \frac{x}{x-1}$

③ $y = \frac{x-2}{x-1}$

④ $y = \frac{-x}{x-1}$

⑤ $y = \frac{x+3}{x+1}$

해설

$y = \frac{1}{x}$ 과 겹쳐지는 함수는 $y = \frac{1}{x-a} + b$ 의

꼴로 된 것이다.

$$\therefore \textcircled{2} y = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

5. 함수 $y = \frac{-2x}{x+3}$ 에 관한 설명 중 틀린 것을 고르면?

- ① 점근선 중 하나는 $x = -3$ 이다.
- ② 점근선 중 하나는 $y = -2$ 이다.
- ③ 함수 $y = \frac{6}{x} - 2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프다.
- ④ 이 그래프는 x 축, y 축을 모두 지난다.
- ⑤ 함수 $y = \frac{6}{x+3}$ 의 그래프를 y 축 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프다.

해설

$$y = \frac{-2x}{x+3} = \frac{-2(x+3)+6}{x+3} = \frac{6}{x+3} - 2$$

그러므로 함수의 점근선은 $x = -3$, $y = -2$ 이고

$y = \frac{6}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -3 만큼,

y 축 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프이다.

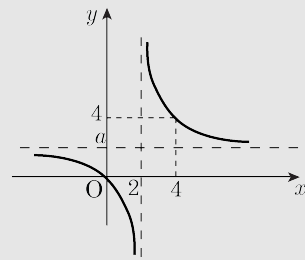
따라서 설명 중 틀린 것은 ③이다.

6. $2 < x \leq 4$ 에서, 유리함수 $y = \frac{4}{x-2} + a$ 의 최솟값이 4이다. a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점근선이 $x = 2, y = a$ 이고,
 $2 < x \leq 4$ 일 때 최솟값이 4이므로
점 $(4, 4)$ 를 지난다.



$$4 = \frac{4}{4-2} + a \therefore a = 2$$

7. $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$ 일 때, 방정식 $|x-3| - |x+2| = -1$ 의 해를 구하면?

① -1

② 0

③ 1

④ 5

⑤ 6

해설

$$x+3 \geq 0, x-2 < 0 \rightarrow -3 \leq x < 2$$

$$-(x-3) - (x+2) = -2x+3-2 = -1$$

$$\therefore x = 1$$

8. 정의역이 $\{x \mid x \leq 3\}$, 치역이 $\{y \mid y \geq 4\}$ 인 무리함수 $f(x) = \sqrt{a(x-p)} + q$ 에 대하여 $f(1) = 6$ 일 때, $a + p + q$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

정의역은 $\{x \mid a(x-p) \geq 0\} = \{x \mid x \leq 3\}$ 이므로 $a < 0$, $p = 3$
치역은 $\{y \mid y \geq 4\}$ 이므로 $q = 4$

$$\therefore f(x) = \sqrt{a(x-3)} + 4$$

이때, $f(1) = 6$ 이므로

$$\sqrt{-2a} + 4 = 6, \sqrt{-2a} = 2, -2a = 4$$

$$\therefore a = -2$$

$$\therefore a + p + q = -2 + 3 + 4 = 5$$

9. 540의 양의 약수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1680

해설

$$\begin{aligned} & (1 + 2 + 2^2)(1 + 3 + 3^2 + 3^3)(1 + 5) \\ & = 7 \times 40 \times 6 = 1680 \end{aligned}$$

10. 어떤 등산모임에서는 다음과 같이 강원도, 충청도, 전라도 세 지역의 6개의 산을 6주에 걸쳐 주말마다 하나씩 등산할 계획을 세우고 있다.

지역	산
강원도	설악산, 오대산
충청도	계룡산, 소백산
전라도	내장산, 지리산

같은 지역의 산끼리 연속적으로 등산하지 않도록 계획을 세우는 방법은 모두 몇 가지인가?

- ① 36
- ② 48
- ③ 60
- ④ 120
- ⑤ 240

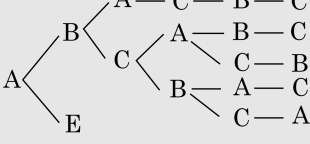
해설

세 지역 강원도, 충청도, 전라도를 각각 A, B, C 라 하면 1주차에 A 지역 산을 등산하고, 2주차에 B 지역 산을 등산하는 경우는 다음 수형도와 같이 5가지가 있고, 같은 지역의 산끼리 위치를 바꾸는 방법은 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (가지)

한편, 1주차에 A 지역, 2주차에 C 지역의 산을 등산하는 경우도 같으므로 1주차에 A 지역의 산을 등산하는 방법의 수는 $5 \times 8 \times 2 = 80$ (가지)

또한, 1주차에 B, C 지역의 산을 등산하는 경우의 수도 같다. 따라서 구하는 방법의 수는

$80 \times 3 = 240$ (가지)



11. 백인종 2 명, 흑인종 3 명, 황인종 2 명을 일렬로 세울 때, 백인종은 백인종끼리, 흑인종은 흑인종끼리 이웃하여 서는 경우의 수를 구하면?

① 24 ② 144 ③ 210 ④ 288 ⑤ 720

해설

백인종과 흑인종을 각각 한 묶음으로 본다.

$$4! \times 2! \times 3! = 288$$

12. 여섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 네 개의 숫자를 써서 네 자리의 정수를 만들 때, 짝수는 몇 개인가?

- ① 96
- ② 114
- ③ 128
- ④ 144
- ⑤ 156

해설

0 :₅ $P_3 = 60$

2: $4 \times 4 \times 3 = 48$

4: $4 \times 4 \times 3 = 48$

$\therefore 60 + 48 \times 2 = 156$

13. 남학생 4명, 여학생 6명 중에서 반장 1명, 부반장 1명을 뽑을 때, 반장, 부반장 중에서 적어도 한 명은 여자인 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 78가지

해설

전체의 경우에서 모두 남자인 경우의 수를 빼준다.

$${}_{10}P_2 - {}_4P_2 = 90 - 12 = 78$$

14. 서로 다른 알파벳 a, b, c, d, e 를 사전식으로 배열하였을 때, 58 번째 단어를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $cbdea$

해설

a □ □ □ □의 경우의 수는
 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (가지)
 b □ □ □ □의 경우의 수는
 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (가지)
 ca □ □ □의 경우의 수는
 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (가지)
그 다음 55번째의 수 부터는
 $cbade, cbaed, cbdae, \dots$ 이므로
58번째 단어는 $cbdea$ 이다.

15. 집합 $X = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 일대일 대응의 개수는?

- ① 16 개 ② 24 개 ③ 30 개 ④ 42 개 ⑤ 54 개

해설

집합 X 의 원소를 나열하는 방법의 수와 같다.

$${}_4P_4 = 24(\text{개})$$

16. $\frac{d}{a+b+c} = \frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{c+d+a} = \frac{c}{d+a+b} = k$ 라 할 때, k 가 취할 수 있는 모든 값의 합은?

- ① -1 ② $-\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{3}{4}$

해설

준식에서 $d = (a+b+c)k$,
 $a = (b+c+d)k$,
 $b = (c+d+a)k$,
 $c = (d+a+b)k$ 이므로
변변 더하면 $a+b+c+d = 3k(a+b+c+d)$
i) $a+b+c+d \neq 0$ 일 때, $k = \frac{1}{3}$
ii) $a+b+c+d = 0$ 일 때, $a+b+c = -d$ 이므로
 $k = \frac{d}{a+b+c} = \frac{d}{-d} = -1$
 $\therefore k$ 의 모든 값의 합은 $-\frac{2}{3}$

17. 함수 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 다음 보기중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$
- ㉡ $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$
- ㉢ $f^{-1}(x) = f(x)$ (단 f^{-1} 는 f 의 역함수)

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠ $f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1}$
 $= \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$
- ㉡ $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1+x}{1-x} \neq f(x)$
- ㉢ $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1} = f(x)$
- 따라서 ㉠, ㉢

18. $x = \frac{2a}{1+a^2}$ ($a > 1$) 일 때, $P = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ 의 값을 구하면?

- ① a ② $a+1$ ③ $a-1$ ④ a^2 ⑤ $\frac{1}{a}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= \sqrt{1 + \frac{2a}{1+a^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1+2a+a^2}{1+a^2}} = \frac{\sqrt{(a+1)^2}}{\sqrt{1+a^2}} \\ &= \frac{|a+1|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1+a}{\sqrt{1+a^2}} \\ (\because \text{조건에서 } a > 1) \\ \text{또, } \sqrt{1-x} &= \frac{|a-1|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}} \\ \therefore P &= \frac{\frac{1+a}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}}}{\frac{1+a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}}} \\ &= \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}\end{aligned}$$

19. $\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7 + 2\sqrt{12}$, $\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 7 - 2\sqrt{12}$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

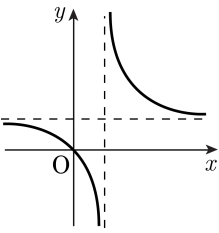
$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7 + 2\sqrt{12}, \frac{1}{x} = \sqrt{3} + 2, x = 2 - \sqrt{3}$$

$$\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 7 - 2\sqrt{12}, \frac{1}{y} = 2 - \sqrt{3}, y = 2 + \sqrt{3}$$

$$x + y = 4, xy = 1$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 64 - 12 = 52$$

20. 다음 그림은 분수함수 $y = \frac{b}{x+a} + c$ 의 그래프의 개형이다. 다음 중 무리함수 $y = a - \sqrt{bx+c}$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤

해설

점근선이 $x = \text{양수}$, $y = \text{양수}$ 이므로
 $y = \frac{b}{x+a} + c$ 에서 $a < 0$, $c > 0$
 그리고 원점을 지나므로
 $\frac{b}{a} + c = 0$, $b = -ac > 0$
 $\therefore y = -\sqrt{bx+c} + a$
 꼭짓점 $(-\frac{c}{b}, a)$, $(-\frac{c}{b} < 0, a < 0)$
 루트 앞의 부호가 음수이므로 그래프의 개형은 ④이다.

21. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 첫 번째 나온 눈의 수를 a , 두 번째 나온 눈의 수를 b 라 하자. $f(x) = (a-4)x+6$, $g(x) = (3-b)x+2$ 라 할 때 합성함수 $y = (f \circ g)(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않는 경우의 수는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$y = f(g(x)) = (a-4)\{(3-b)x+2\}+6$
 $= (a-4)(3-b)x + (2a-2)$
함수의 그래프가 x 축과 만나지 않기 위해서는 $2a-2 \neq 0$ 이고 $(a-4)(3-b) = 0$ 이다.
 $\therefore (a,b)$ 는 $(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (2,3), (3,3), (5,3), (6,3)$ 의 10 가지

22. something의 9 개의 문자를 일렬로 나열할 때, e 와 i 사이에 3 개의 문자가 들어 있는 경우의 수는?
- ① 8400

② 16800

③ 33600

④ 50400

⑤ 144000

해설

3 개의 문자를 선택하여 배열하는 경우의 수 : ${}_7P_3$
e와 i 를 배열하는 방법의 수 : 2
e 와 i 그리고 3 개의 문자를 하나로 보고 나머지 문자와 같이 배열하는 방법의 수 : 5!
 ${}_7P_3 \times 2 \times 5! = 50400$

23. A 지역에는 세 곳, B 지역에는 네 곳, C 지역에는 다섯 곳, D 지역에는 여섯 곳의 관광지가 있다. 이 중에서 세 곳을 선택하여 관광하려고 할 때, 선택한 세 곳이 모두 같은 지역이 되는 경우의 수는?

- ① 20
- ② 25
- ③ 30
- ④ 35
- ⑤ 40

해설

- (i) 선택한 세 곳이 모두 A 지역일 경우 : 1 (가지)
- (ii) 선택한 세 곳이 모두 B 지역일 경우 :
이는 B 지역의 네 곳 중 세 곳을 선택한 경우와 같다.
 ${}_4C_3 = 4$ (가지)
- (iii) 선택한 세 곳이 모두 C 지역일 경우 :
위와 같은 방법으로 ${}_5C_3 = 10$ (가지)
- (iv) 선택한 세 곳이 모두 D 지역일 경우 :
위와 같은 방법으로 ${}_6C_3 = 20$ (가지)
- 따라서, (i), (ii), (iii), (iv) 에 의하여
 $1 + 4 + 10 + 20 = 35$ (가지)

24. H 고등학교 앞 분식점 메뉴에는 라면 요리가 4가지, 튀김 요리가 5가지 있다. 이때, 라면 요리 2가지, 튀김 요리 3가지를 주문하는 방법의 수를 a , 특정한 라면 요리 1가지와 특정한 튀김 요리 2가지가 반드시 포함되도록 5가지 요리를 주문하는 방법의 수를 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 75가지

해설

라면 요리 4가지 중에서 2가지를 주문하는 방법의 수는 ${}_4C_2$ 이고, 튀김 요리 5가지 중에서 3가지를 주문하는 방법의 수는 ${}_5C_3$ 이므로

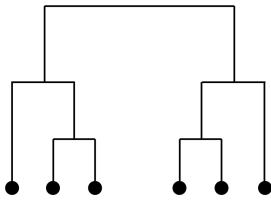
$$a = {}_4C_2 \times {}_5C_3 \\ = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 60$$

또, 특정한 라면 요리 1가지와 특정한 튀김 요리 2가지를 포함하여 5가지 요리를 주문하는 방법의 수는 특정한 라면 요리 1가지와 튀김 요리 2가지를 제외하고 나머지 6가지의 요리 중에서 2가지를 주문하는 방법과 같으므로

$$b = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

따라서 $a + b = 60 + 15 = 75$

- 25.** 씨름 대회에 참가한 6명이 그림과 같은 토너먼트 방식으로 시합을 가질 때, 대진표를 작성하는 방법은 몇 가지인가?



- ① 45 ② 60 ③ 75 ④ 90 ⑤ 105

해설

우선 3 팀씩 두 조로 나눈다.

$$\Rightarrow_6 C_3 \times_3 C_3 \times \frac{1}{2!} = 10$$

그리고 뽑은 세팀중에서 부전승 한팀만 뽑으면 한쪽의 대진표는 자연히 만들어 진다.

$$\therefore 10 \times_3 C_1 \times_3 C_1 = 90$$