1. 분수식 $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\frac{x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}\cdots$ ①

①에서 분자를 x에 관하여 정리하면

$x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)$

$=(z-y)x^2-(z^2-y^2)x+yz^2-y^2z$

$=(z-y)x^2-(z+y)(z-y)x+zy(z-y)$

$=(z-y)\left\{x^2-(z+y)x+zy\right\}$

$=(z-y)(x-z)(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)$

$\therefore$ (준식) $=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$

2. 등식 $\frac{a}{x}-\frac{b}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}$ 이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b의 합을 구하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

양변에 $x(x+1)$을 곱하면
$a(x+1)-bx=1,\ ax+a-bx-1=0$
$x(a-b)+(a-1)=0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=b,\ a=1,\ b=1$
$\therefore\ a+b=2$

3. $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{13\times14}=\frac{a}{14}$ 에서 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

준식 $=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdots-\frac{1}{14}=1-\frac{1}{14}=\frac{13}{14}$

$\therefore a=13$

4. $3x = 4y = 2z$ 일 때, $\dfrac{x^2 - y^2 + z^2}{x^2 + y^2 - z^2}$ 의 값은? (단, $xyz \neq 0$)

① $-\dfrac{1}{7}$ ② $\dfrac{2}{11}$ ③ $-\dfrac{43}{11}$ ④ $\dfrac{7}{9}$ ⑤ 2

해설

$3x = 4y = 2z = k$ 라 놓는다.

$x = \dfrac{k}{3},\ y = \dfrac{k}{4}, z = \dfrac{k}{2}$ 를 주어진 식에 대입한다.

$$\therefore \frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^2 + y^2 - z^2} = \frac{\frac{k^2}{9} - \frac{k^2}{16} + \frac{k^2}{4}}{\frac{k^2}{9} + \frac{k^2}{16} - \frac{k^2}{4}} = \frac{64 - 36 + 144}{64 + 36 - 144} = \frac{172}{-44} = -\frac{43}{11}$$

5. $2x-y+z=0,\ x-2y+3z=0$일 때, $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}$의 값을 구하면 $\dfrac{n}{m}$이다. 이때, $m+n$의 값을 구하여라.(단, m, n은 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x-y+z=0\cdots$ ㉠

$x-2y+3z=0\cdots$ ㉡

㉠ $\times 2-$ ㉡ : $3x=z$

$\therefore x=\dfrac{z}{3},\ y=\dfrac{5z}{3}$

여기서 $x=k$ 라 하면 $y=5k,\ z=3k$

따라서 $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{k^2-5k^2+25k^2}{k^2+25k^2+9k^2}=\dfrac{3}{5}\quad\therefore m=5,\ n=3$

$\therefore m+n=8$

6. $a : b = c : d$일 때 다음 등식 중 성립하지 <u>않는</u> 것은?(단, 분모는 모두 0 이 아니다.)

① $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$
② $\frac{a+d}{a-d} = \frac{b+c}{b-c}$
③ $\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$
④ $\frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$
⑤ $\frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$

해설

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$에서

$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \cdots$ ㉠

$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \cdots$ ㉡

㉡ ÷ ㉠하면

$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$에서

$\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d} \cdots$ ㉢

$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d} \cdots$ ㉣

㉣ ÷ ㉢하면

$\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$에서 가비의 리를 이용하면

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$

$\therefore \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$

7. 함수 $y = \dfrac{bx+c}{x+a}$ 의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나고 $x = 3,\ y = 1$을 점근선으로 할 때, 상수 a, b, c에 대해서 $a - b - c$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

점근선이 $x = 3,\ y = 1$이므로
$a = -3,\ b = 1$이다.
그리고 점 $(1, 2)$를 지나므로,
$2 = \dfrac{1+c}{1-3},\ c = -5$
$\therefore\ a - b - c = 1$

8. 다음 중 함수 $y = \dfrac{2x+8}{x+3}$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

① 제1사분면　　② 제2사분면

③ 제3사분면　　④ 제4사분면

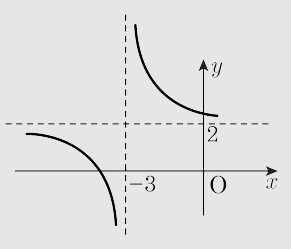
⑤ 모든 사분면을 지난다.

해설

$y = \dfrac{2x+8}{x+3}$

$y = \dfrac{2(x+3)+2}{x+3}$

$y = \dfrac{2}{x+3} + 2$



따라서 제4사분면을 지나지 않는다.

9. 분수함수 $y = \dfrac{x+2}{x+1}$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $y = \dfrac{1}{x}$ 의 그래프를 x축으로 -1, y축으로 1만큼 평행이동한 그래프이다. ㉡ 두 점근선의 교점은 $(-1,\ 1)$ 이다. ㉢ 두 직선 $y = -x-2,\ y = x+2$ 에 대해 대칭인 곡선이다.

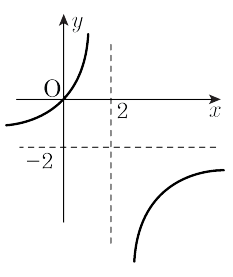
① ㉢　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$y = \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{1}{x+1} + 1$

㉠ 이 분수함수는 $y = \dfrac{1}{x}$ 을 x축으로 -1,
y축으로 1만큼 평행이동 시킨 것이다.
㉡ 점근선이 $x = -1,\ y = 1$ 이므로 교점은 $(-1, 1)$
㉢ 대칭되는 직선은 기울기가 ± 1 이고 $(-1, 1)$ 을 지나는 직선이다.
$\Rightarrow\ \ y = -x,\ \ y = x+2$

10. 다음 그림과 같이 주어진 분수함수 $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 점근선이 $x = 2$, $y = -2$ 일 때, 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값은?



① -6　　② -4　　③ -3

④ 2　　⑤ 7

해설

점근선이 $x = 2, y = -2$ 이므로 $y = -2 + \dfrac{k}{x-2}$, $(k \neq 0)$

점 $(0,\ 0)$ 을 지나므로

$0 = -2 + \dfrac{k}{-2}$,　$k = -4$

따라서 $y = -2 + \dfrac{-4}{x-2} = \dfrac{-2x}{x-2}$

$\therefore\ a = -2,\ b = 0,\ c = -2$

$\therefore\ a+b+c = -4$

11. $0 < x \leq 1$일 때, 무리식 $\sqrt{1+\frac{2x+1}{x^2}} - \sqrt{1-\frac{2x-1}{x^2}}$을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\sqrt{1+\frac{2x+1}{x^2}} - \sqrt{1-\frac{2x-1}{x^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2}} - \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2}}$$
$$= \frac{x+1}{x} + \frac{x-1}{x} = \frac{2x}{x} = 2$$

12. $0 \le a < 2$ 이고 $x = \dfrac{4a}{a^2+4}$ 일 때

$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$1 + x = 1 + \dfrac{4a}{a^2+4} = \dfrac{a^2+4a+4}{a^2+4} = \dfrac{(a+2)^2}{a^2+4}$

$1 - x = 1 - \dfrac{4a}{a^2+4} = \dfrac{a^2-4a+4}{a^2+4} = \dfrac{(a-2)^2}{a^2+4}$

$a^2 + 4 > 0$ 이고 $0 < a < 2$ 이므로

$a + 2 > 0,\ a - 2 < 0$

$\therefore\ \sqrt{1+x} = \sqrt{\dfrac{(a+2)^2}{a^2+4}} = \dfrac{a+2}{\sqrt{a^2+4}}$

$\sqrt{1-x} = \sqrt{\dfrac{(a-2)^2}{a^2+4}} = \dfrac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}}$

$\therefore\ \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = \dfrac{a+2}{\sqrt{a^2+4}} + \dfrac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}}$

$= \dfrac{4}{\sqrt{a^2+4}}$

$\therefore\ a = 0$ 일 때 최댓값 2

13. $x = \dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$ 일 때, x^2+xy+y^2 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

$y = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$

$x+y = 2\sqrt{3},\ xy = 1$

$x^2+xy+y^2 = (x+y)^2 - xy = 12-1 = 11$

14. $-\frac{1}{3} \le x \le \frac{8}{3}$ 에서 함수 $y = \sqrt{3x+a}+2$ 의 최댓값이 b , 최솟값이 2 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = \sqrt{3x+a}+2 = \sqrt{3\left(x+\frac{a}{3}\right)}+2$

주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{a}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다.

i) $x = -\frac{1}{3}$ 일 때 최솟값을 가지므로

$2 = \sqrt{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+a}+2 \quad \therefore\ a = 1$

ii) $x = \frac{8}{3}$ 일 때 최댓값을 가지므로

$b = \sqrt{3\cdot\frac{8}{3}+1}+2 = 5$

i), ii) 에서 $a+b = 1+5 = 6$

15. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, $g(x) = \sqrt{x}$ 에 대하여

$(f \circ g)(a) = \dfrac{1}{2}$ 일 때, $(g \circ f)(4a)$ 의 값은? (단, $(a > 0)$)

① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

해설

$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(\sqrt{a}) = \dfrac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$ 이므로

$\dfrac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2}$, $2\sqrt{a} = 1 + \sqrt{a}$

$\sqrt{a} = 1 \quad \therefore a = 1$

$\therefore (g \circ f)(4a) = (g \circ f)(4) = g(f(4)) = g\left(\dfrac{4}{5}\right)$

$= \sqrt{\dfrac{4}{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

16. $A = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$, $B = \dfrac{2}{2+\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{x}}}$, $C = \dfrac{3}{3+\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{x}}}$ 에 대하여 $x = \dfrac{2}{5}$ 일 때의 A, B, C 의 대소 관계를 순서대로 옳게 나타낸 것은?

① $A > B > C$　　② $A \geq B = C$　　③ $A < B < C$

④ $A \leq B = C$　　⑤ $A = B = C$

해설

$$A = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{1+\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{2}{7}} = \frac{1}{\frac{9}{7}} = \frac{7}{9}$$

$$B = \frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{x}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2+5}} = \frac{1}{\frac{8}{7}} = \frac{7}{8}$$

$$C = \frac{3}{3+\frac{3}{3+\frac{3}{x}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{21}{2}}} = \frac{1}{\frac{23}{21}} = \frac{21}{23}$$

$\therefore\ A = \dfrac{21}{27},\ B = \dfrac{21}{24},\ C = \dfrac{21}{23}$

$\therefore A < B < C$

17. 세 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x+\frac{1}{y}=1,\ y+\frac{1}{z}=1$이 성립할 때, xyz의 값을 구하면?

① -1　　② 1　　③ 2　　④ -2　　⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$x+\frac{1}{y}=1\cdots$①, $y+\frac{1}{z}=1\cdots$②

①에서 $\frac{1}{y}=1-x,\ y=\frac{1}{1-x}$

이것을 ②에 대입하면

$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{z}=1,\ z=-\frac{1-x}{x}$

$\therefore\ xyz=x\cdot\frac{1}{1-x}\cdot\left(-\frac{1-x}{x}\right)=-1$

18. $\dfrac{d}{a+b+c}=\dfrac{a}{b+c+d}=\dfrac{b}{c+d+a}=\dfrac{c}{d+a+b}=k$라 할 때, k가 취할 수 있는 모든 값의 합은?

① -1　② $-\dfrac{2}{3}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $-\dfrac{3}{4}$

해설

준식에서 $d=(a+b+c)k$,
$a=(b+c+d)k$,
$b=(c+d+a)k$,
$c=(d+a+b)k$ 이므로
변변 더하면 $a+b+c+d=3k(a+b+c+d)$

i) $a+b+c+d\neq 0$일 때, $k=\dfrac{1}{3}$

ii) $a+b+c+d=0$일 때, $a+b+c=-d$이므로

$$k=\frac{d}{a+b+c}=\frac{d}{-d}=-1$$

$\therefore$ k의 모든 값의 합은 $-\dfrac{2}{3}$

19. 전 구간을 일정한 속도 60 km/h 로 달리도록 되어 있는 어느 고속도로에서 하행하던 고속버스가 5 분 동안에 상행하는 같은 회사 소속의 고속버스 20 대를 보았다. 이 고속버스의 배차 간격이 일정할 때, 100 km 의 상행선에는 약 몇 대의 고속버스가 달리고 있는가?

① 50 대 ② 100 대 ③ 120 대
④ 150 대 ⑤ 200 대

해설

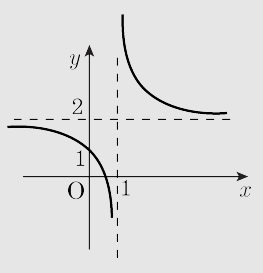
각 방향으로 시속 60 km 로 달리고 있으므로 어느 한 방향에 대한 다른 방향의 상대 속도는 시속 120 km 이다.
이때, 5 분 동안의 주행 거리는 $120\times\frac{5}{60}=120\times\frac{1}{12}=10(\mathrm{km})$ 이고, 이 사이를 달리는 동안에 20 대의 버스를 보았으므로 100 km 의 구간에는 200 대가 있다.

20. 분수함수 $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ 의 치역이 $\{y \mid y \le 1\}$ 일 때, 다음 중 정의역을 바르게 구한 것은?

① $\{x \mid 0 < x < 1\}$
② $\{x \mid 0 \le x < 1\}$
③ $\{x \mid 0 < x \le 1\}$
④ $\{x \mid 0 \le x \le 1\}$
⑤ $\{x \mid -1 \le x < 1\}$

해설

$y = \dfrac{2x-1}{x-1} = \dfrac{2(x-1)+1}{x-1} = 2 + \dfrac{1}{x-1}$



$y = 1$ 일 때, $1 = \dfrac{2x-1}{x-1}$ 이므로, $x = 0$

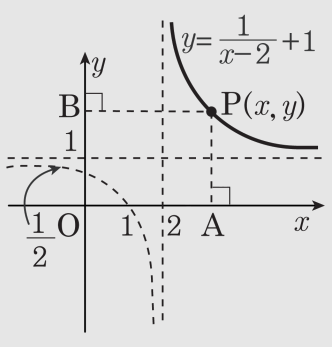
정의역은 $\{x \mid 0 \le x < 1\}$

21. 분수함수 $y = \frac{1}{x-2} + 1 (x > 2)$ 의 그래프 위의 한 점 P(x, y) 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 하자. 이 때, $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설



위 그림에서 $\overline{PA} = y = \frac{1}{x-2} + 1$ $\overline{PB} = x (x > 2)$

$\therefore\ \overline{PA} + \overline{PB} = x + \frac{1}{x-2} + 1 = x - 2 + \frac{1}{x-2} + 3$

$\geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{1}{x-2}} + 3 = 5$

(단, 등호는 $x - 2 = \frac{1}{x-2}$ 일 때 성립)

22. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$ 일 때 $f^{1999}(0)$ 의 값은?(단 $f^2(x) = (f \circ f)(x), \cdots\cdots, f^{n+1}(x) = (f \circ f^n)(x)$)

① $\dfrac{3}{2}$ ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(0) = 3,$

$f^2(0) = \dfrac{6-3}{3-1} = \dfrac{3}{2}, f^3(0) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$

$\therefore\ f^{3n}(0) = 0$

$1999 = 666 \times 3 + 1$

$\therefore f^{1999}(0) = f(0) = 3$

23. 함수 $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \dfrac{2x-4}{-x+3}$ 일 때, 함수 $y = |x+a| + b + c$ 의 최솟값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

f^{-1} 의 역함수가 f 이므로 $f(x) = (f^{-1})^{-1}(x)$

$y = f^{-1}(x) = \dfrac{2x-4}{-x+3}$ 를

x 에 대하여 풀면, $x = \dfrac{3y+4}{y+2}$

x 와 y 를 바꾸면, $y = f(x) = \dfrac{3x+4}{x+2}$

$f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 이므로 $a = 3,\ b = 4,\ c = 2$

함수 $y = |x+3| + 6$ 은 $x = -3$ 일 때, 최솟값 6 을 갖는다.

24. 함수 $f(x) = \sqrt{2x+1}$의 역함수를 $y = g(x)$라 할 때, 좌표평면 위에서 두 곡선 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 구하면?

① $(-1,\ -1)$　② $(0,\ 0)$　③ $(1,\ 1)$
④ $(2,\ 2)$　⑤ $(3,\ 3)$

해설

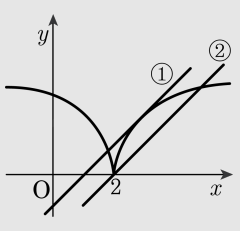
$y = f(x)$와 $y = g(x)$는 서로 역함수이므로
두 함수의 그래프의 교점은 $y = f(x)$와
직선 $y = x$의 교점과 일치한다.
따라서 $\sqrt{2x+3} = x$의 양변을 제곱하여
정리하면 $x^2 - 2x - 3 = 0,\ (x+1)(x-3) = 0$
$\therefore\ x = -1,\ 3$
$x \geq 0$ 이므로 $x = 3$
즉, 교점의 좌표는 $(3,\ 3)$이다.

25. $y = \sqrt{|x-2|}$ 와 $y = x + k$ 가 서로 다른 세 점에서 만날 때의 k값의 범위를 구하면?

① $-2 < k < -\frac{7}{4}$　② $-2 < k \le -\frac{7}{4}$　③ $-2 \le k < -\frac{7}{4}$
④ $-2 \le k \le -\frac{7}{4}$　⑤ $k < -\frac{7}{4}$

해설

$y = \sqrt{|x-2|}$의 개형은



와 같고

$y = x + k$ 가 그림의 ①, ② 사이에 있으면 된다.

① $y = \sqrt{x-2}$ 와 $y = x + k$ 가 접할 때,

$x + k = \sqrt{x-2}$에서

$x^2 + (2k-1)x + k^2 + 2 = 0$

$D = (2k-1)^2 - 4k^2 - 8 = 0$

$\therefore\ k = -\frac{7}{4}$

② $y = x + k$ 가 $(2, 0)$ 을 지날 때

$0 = 2 + k$

$k = -2$

$\therefore -2 < k < -\frac{7}{4}$