

1. $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{2}{(a+1)(a+3)} + \frac{3}{(a+3)(a+6)}$ 을 간단히 한 것은 ?

① $\frac{1}{a} + \frac{6}{a+6}$

② $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+6}$

③ $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+6}$

④ $\frac{1}{a} - \frac{6}{a+6}$

⑤ $\frac{2}{a} - \frac{1}{a+6}$

해설

(준식)

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+3} - \frac{1}{a+6}$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+6}$$

2. 두 양수 m, n 에 대하여 $\frac{ma+nb}{m+n} = \frac{mb+nc}{m+n} = \frac{mc+na}{m+n} = 10$ 이 성립할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$$\begin{aligned}\frac{ma+nb}{m+n} &= \frac{mb+nc}{m+n} = \frac{mc+na}{m+n} \\&= \frac{(ma+nb) + (mb+nc) + (mc+na)}{(m+n) + (m+n) + (m+n)} \\&= \frac{m(a+b+c) + n(a+b+c)}{3(m+n)} \\&= \frac{(m+n)(a+b+c)}{3(m+n)} = \frac{a+b+c}{3}\end{aligned}$$

따라서, $\frac{a+b+c}{3} = 10$ 이므로
 $a+b+c = 30$

3. 분수식 $\frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-2} + \frac{x+10}{x^2-4}$ 를 간단히 하면?

- ① $\frac{1}{x-2}$ ② $\frac{1}{x+2}$ ③ $\frac{4}{x-2}$ ④ $\frac{4}{x+2}$ ⑤ $\frac{4x}{x-2}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-2} + \frac{x+10}{x^2-4} \\ &= \frac{2x-4+x+2+x+10}{x^2-4} \\ &= \frac{4x+8}{x^2-4} \\ &= \frac{4}{x-2} \end{aligned}$$

4. 다음 중 $\frac{\frac{x}{1+x} - \frac{1+x}{x}}{\frac{x}{1+x} + \frac{1-x}{x}}$ 를 간단히 나타낸 것은?
- ① $-1-2x$ ② $1-2x$ ③ $1+2x$
- ④ $-1+2x$ ⑤ $2x$

해설

$$(\text{분자}) = \frac{x^2 - (1+x)^2}{x(x+1)} = \frac{-1-2x}{x(x+1)}$$

$$(\text{분모}) = \frac{x^2 + (1-x)(1+x)}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

$$\therefore \frac{\frac{-1-2x}{x(x+1)}}{\frac{1}{x(x+1)}} = \frac{-1-2x}{x(x+1)} \times x(x+1) = -1-2x$$

5. $w : x = 4 : 3$, $y : z = 3 : 2$, $z : x = 1 : 6$ 일 때, $w : y$ 는?

- ① $1 : 3$ ② $16 : 3$ ③ $20 : 3$ ④ $27 : 4$ ⑤ $12 : 1$

해설

$$\frac{w}{y} = \frac{w}{x} \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{z}{y} = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$$

6. $2x - y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$ 일 때, $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$ 이다. 이때, $m + n$ 의 값을 구하여라.(단, m, n 은 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$2x - y + z = 0 \cdots \textcircled{A}$$

$$x - 2y + 3z = 0 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \times 2 - \textcircled{B} : 3x = z$$

$$\therefore x = \frac{z}{3}, y = \frac{5z}{3}$$

여기서 $x = k$ 라 하면 $y = 5k, z = 3k$

$$\text{따라서 } \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{k^2 - 5k^2 + 25k^2}{k^2 + 25k^2 + 9k^2} = \frac{3}{5} \therefore m = 5, n = 3$$

$$\therefore m + n = 8$$

7. $\frac{x+y}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{8} = \frac{2x+8y-z}{a}$ 가 성립할 때, a 의 값은?

① 2

② 7

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

가비의 리에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{8} &= \frac{p(x+y) + qy + rz}{5p + 2q + 8r} \\ &= \frac{2x + 8y - z}{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}px + py + qy + rz &= px + (p+q)y + rz \\ &= 2x + 8y - z \text{에서}\end{aligned}$$

$$p = 2, q = 6, r = -1$$

$$\therefore a = 5p + 2q + 8r = 5 \times 2 + 2 \times 6 + 8 \times (-1) = 14$$

$$\therefore a = 14$$

8. $a : b = c : d$ 일 때 다음 등식 중 성립하지 않는 것은?(단, 분모는 모두 0 이 아니다.)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \\ \textcircled{3} \quad & \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d} \\ \textcircled{5} \quad & \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & \frac{a+d}{a-d} = \frac{b+c}{b-c} \\ \textcircled{4} \quad & \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \end{aligned}$$

해설

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 에서}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 하면

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ 에서}$$

$$\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d} \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d} \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4} \div \textcircled{3}$ 하면

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 에서 가비의 리를 이용하면}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\therefore \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

9. 다음 그래프 중 평행이동에 의하여 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은?

① $y = \frac{x+1}{x-1}$

② $y = \frac{x}{x-1}$

③ $y = \frac{x-2}{x-1}$

④ $y = \frac{-x}{x-1}$

⑤ $y = \frac{x+3}{x+1}$

해설

$y = \frac{1}{x}$ 과 겹쳐지는 함수는 $y = \frac{1}{x-a} + b$ 의

꼴로 된 것이다.

$$\therefore \textcircled{2} y = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

10. 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지나고, 점근선의 방정식이 $x = 2, y = 1$ 일 때, abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

점근선이 $x = 2, y = 1$ 이므로

$$y = \frac{k}{x-2} + 1 \cdots \textcircled{1}$$

①이 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -k + 1 \therefore k = 1$$

$$y = \frac{1+x-2}{x-2} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\therefore a = 1, b = -1, c = -2$$

따라서 $abc = 2$

11. 분수함수 $y = \frac{x-1}{x-2}$ 의 그래프가 직선 $y = -x + a$ 에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

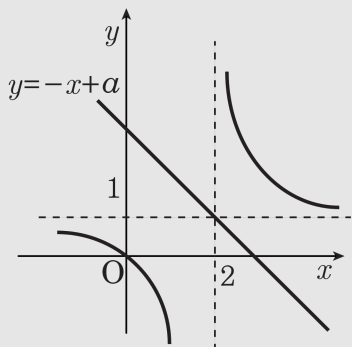
$$y = \frac{x-1}{x-2} = \frac{(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 1$$

즉, 점근선이 $x = 2$, $y = 1$ 인 분수함수이므로 그래프는 다음 그림과 같다.

이 그래프가 직선 $y = -x + a$ 에 대하여 대칭이 되려면 직선 $y = -x + a$ 가 두 점근선의 교점인 $(2, 1)$ 을 지나야 하므로

$$1 = -2 + a$$

$$\therefore a = 3$$



12. $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$ 일 때, 방정식 $|x-3| - |x+2| = -1$ 의 해를 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} x+3 \geq 0, x-2 < 0 &\rightarrow -3 \leq x < 2 \\ -(x-3) - (x+2) &= -2x+3-2 = -1 \\ \therefore x &= 1 \end{aligned}$$

13. 함수 $y = \sqrt{2x+2} + a$ 의 그래프가 제 1, 3, 4 사분면을 지나도록 하는 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

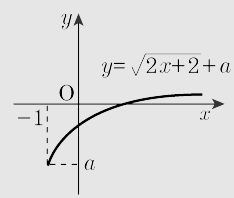
▷ 정답 : -2

해설

$$y = \sqrt{2x+2} + a = \sqrt{2(x+1)} + a$$

주어진 함수는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

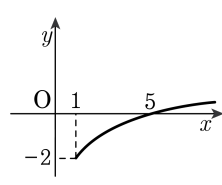
따라서 이 함수의 그래프가 제 1, 3, 4 사분면을 지나려면 $x = 0$ 일 때, $y < 0$ 이어야 한다.



$$\sqrt{2} + a < 0 \text{ 이므로 } a < -\sqrt{2}$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 -2이다.

14. 다음 그림은 무리함수 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프를 그린 것이다. 이 때, 상수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c$ 의 값은?



- ① 1 ② -1 ③ 2
 ④ -2 ⑤ 3

해설

$y = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} + c$ 의 그래프를 보면

점(1, -2)에서부터 시작하므로

$$-\frac{b}{a} = 1, c = -2$$

$$\therefore -b = a, c = -2$$

$y = \sqrt{ax-a} - 2$ 가 점(5, 0)을 지나므로

$$0 = \sqrt{5a-a} - 2, 2 = \sqrt{4a}$$

양변을 제곱하면 $4 = 4a$

$$\therefore a = 1$$

따라서 $a = 1, b = -1, c = -2$ 이므로

$$a + b + c = 1 - 1 - 2 = -2$$

15. $x > 2$ 에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $f(x) = \sqrt{x-2} + 2$, $g(x) = \frac{1}{x-2} + 2$ 일 때 $(f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$(f \cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$$

$$(g \cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$$

$$\therefore (f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3) = 6$$

16. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{a}{100}, \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 101} = \frac{b}{101}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 149

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \\ & \quad \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = 1 - \frac{1}{100} \\ &= \frac{99}{100} = \frac{a}{100} \\ \therefore a &= 99 \\ & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 101} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{97} - \frac{1}{99}\right) + \\ & \quad \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{101}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{101} = \frac{50}{101} = \frac{b}{101} \\ \therefore b &= 50 \\ \therefore a + b &= 149 \end{aligned}$$

17. 두 실수 x, y 가 $x+y=6$, $xy=1$, $x>y$ 를 만족할 때, $\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{70\sqrt{2}}{99}$
④ $\frac{7\sqrt{3}}{66}$

② $\frac{65\sqrt{2}}{88}$
⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{55}$

③ $\frac{3\sqrt{2}}{77}$

해설

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 36 - 4 = 32$$

$$\therefore x-y = 4\sqrt{2} \quad (\because x > y)$$

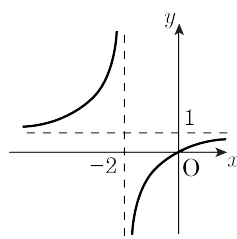
$$\text{(주어진 식)} = \frac{(x-y)^3 + 3xy(x-y)}{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}$$

$$= \frac{128\sqrt{2} + 3 \cdot 4\sqrt{2}}{216 - 3 \times 1 \times 6}$$

$$= \frac{140\sqrt{2}}{198} = \frac{70\sqrt{2}}{99}$$

18. 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 다음과 같을 때,
 $a+b+c$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



해설

$y = 1 + \frac{k}{x+2}$, ($k \neq 0$)가 점 (0, 0)을 지나므로

$$0 = 1 + \frac{k}{0+2}, \quad k = -2$$

$$\text{따라서 } y = 1 + \frac{-2}{x+2} = \frac{x}{x+2}$$

$$\therefore a = 1, b = 0, c = 2$$

$$\therefore a + b + c = 3$$

19. $2 \leq x \leq 4$ 일 때, 함수 $y = \frac{3x-4}{x-1}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. Mm 의 값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$$y = \frac{3x-4}{x-1} = \frac{-1}{x-1} + 3$$

$$x = 2 \text{ 일 때 최소이므로, } M = \frac{-1}{2-1} + 3 = 2$$

$$x = 4 \text{ 일 때 최대이므로, } m = \frac{-1}{4-1} + 3 = \frac{8}{3}$$

$$\therefore Mm = 2 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

20. 분수함수 $f(x) = \frac{ax+5}{bx+c}$ 의 그래프는 점 $(1, 1)$ 을 지나고 점근선의 방정식이 $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{3}$ 이다. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(0)$ 은?

- ① $-\frac{1}{2}$
- ② $\frac{5}{2}$
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ $\frac{22}{5}$

해설

$y = \frac{ax+5}{bx+c}$ 에서
점근선 $x = -\frac{c}{b} = \frac{1}{2}, y = \frac{a}{b} = -\frac{1}{3}$
 $(1, 1)$ 을 지나므로
 $1 = \frac{a+5}{b+c}$
 $2c = -b, 3a = -b, c = -3$
 $\therefore y = \frac{-2x+5}{6x-3}$
 $y^{-1} = \frac{3x+5}{6x+2}$
 $g(x) = \frac{3x+5}{6x+2}$
 $\therefore g(0) = \frac{5}{2}$

21. $x = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$, $y = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$ 일 때, $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x+y}{4}} - \sqrt{1-\frac{x+y}{4}}}$ 의 값을

구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}-1, \quad x+y = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{x+y}{4}} &= \sqrt{1+\frac{2\sqrt{3}}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\frac{x+y}{4}} &= \sqrt{1-\frac{2\sqrt{3}}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{4-2\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\end{aligned}$$

주어진 식에 대입하면

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) - \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

22. $x = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$ 에 대하여 $x^3 + x^2 + x + 1 = a\sqrt{3} + b$ 가 성립할 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 유리수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$x = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$2x + 1 = \sqrt{3}, \quad (2x + 1)^2 = 3$$

$$\therefore 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\therefore x^3 + x^2 + x + 1$$

$$= (2x^2 + 2x - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{3}{2}x + 1$$

$$= \frac{3}{2}x + 1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + 1$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4} = a\sqrt{3} + b$$

$$\therefore a + b = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

23. 자연수 x, y, z 에 대하여 $\sqrt{17+x\sqrt{2}}=y+z\sqrt{2}$ 가 성립할 때, $x+y+z$ 의 값을 구하면?

- ① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

해설

$\sqrt{17+x\sqrt{2}}=y+z\sqrt{2}$ 의 양변을 제곱하면
 $17+x\sqrt{2}=y^2+2z^2+2yz\sqrt{2}$
 $\therefore y^2+2z^2=17\cdots\textcircled{1}, x=2yz\cdots\textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 에서 $z=1$ 이면 $y=\sqrt{15}$ 이므로 자연수가 아니다.
 $z=2$ 이면 $y^2=9 \quad \therefore y=3$
 $z=3$ 이면 $y^2=-1<0$ 이므로 모순
 $\therefore x=12, y=3, z=2$
 $\therefore x+y+z=17$

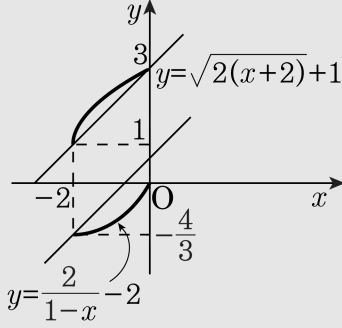
24. 정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 0\}$ 인 두 함수 $y = \sqrt{2(x+2)}+1, y = \frac{2}{1-x}-2$ 에 대하여 $y = x+r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다는 아래에 있고 $y = \frac{2}{1-x}-2$ 의 그래프 보다는 위에 있을 때, r 은 범위가 $r_1 < r < r_2$ 라고 한다. $3r_1 - r_2$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$-2 \leq x \leq 0$ 에서

$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 과 $y = \frac{2}{1-x}-2$ 의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



이 때, $y = x+r$ 의 그래프가

$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다

아래에 있으므로 $r < 3$

또한, $y = x+r$ 의 그래프가

$y = \frac{2}{1-x}-2$ 의 그래프보다

위에 있으므로 $r > \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{2}{3} < r < 3$

따라서 $r_1 = \frac{2}{3}, r_2 = 3$ 이므로

$\therefore 3r_1 - r_2 = 3 \cdot \frac{2}{3} - 3 = -1$

25. 0이 아닌 세 수 x, y, z 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $2(x+y+z)$ 의 값을 구하시오.

- ㉠ x, y, z 중 적어도 하나는 6이다.
- ㉡ x, y, z 의 각각의 역수의 합은 $\frac{1}{6}$ 이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

㉠에서 $(x-6)(y-6)(z-6)=0\cdots\textcircled{1}$

㉡에서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$ 이므로

$$\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore 6(xy+yz+zx)=xyz$$

$$\textcircled{1}\text{에서 } xyz-6(xy+yz+zx)+36(x+y+z)-216=0$$

$$\therefore 36(x+y+z)=216$$

$$\text{따라서, } 2(x+y+z)=12$$