

1. 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

- ㉠

{3, 6, 9, 12, ⋯} = {x | x는 3의 배수}
- ㉡

{1, 2, 3, 4, 5} = {x | x는 5보다 작은 자연수}
- ㉢

{도, 레, 미, 파, 솔, 라, 시} = {x | x는 계이름}
- ㉤

{1, 2, 3, 4, 6, 12} = {x | x는 10의 약수}
- ㉥

{고구려, 백제, 신라} = {x | x는 현재 우리나라 수도의 명칭}
- ㉦

{빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑, 남색, 보라} = {x | x는 무지개의 색깔}

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉦

해설

㉡

{1, 2, 3, 4} = {x | x는 5보다작은자연수}

㉤

{1, 2, 3, 4, 6, 12} = {x | x는 12의약수}

㉥

{고구려, 백제, 신라}

= {x | x는 우리나라 삼국시대 삼국의명칭}

2. 다음 중 부분집합의 개수가 8 개인 것은?

- ① $\{L, O, V, E\}$
- ② $\{x \mid x \text{는 } 25 \text{의 약수}\}$
- ③ $\{x \mid x \text{는 } -2 \leq x \leq 0 \text{인 자연수}\}$
- ④ $\{x \mid x \text{는 짝수}\}$
- ⑤ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 소수}\}$

해설

- ① 16 개 ② 8 개 ③ $\emptyset$
- ④ 무한집합 ⑤ 16 개

3. 두 집합 $C = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$, $D = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때, $D - C$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{6, 12\}$

해설

$$C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, D \cap C = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$D - C = D - (D \cap C) = \{6, 12\}$$

4. $A = \{1, 2, a+2\}$, $B = \{b-1, 3, 5\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{2, 5\}$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

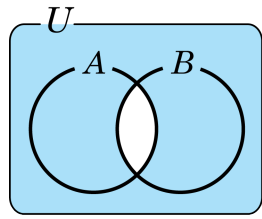
④ 8

⑤ 9

해설

$A \cap B = \{2, 5\}$ 이려면, $a+2=5$, $b-1=2 \therefore a=3, b=3$
 $\therefore a+b=6$

5. 다음 벤 다이어그램에서 $n(U) = 20$, $n(A) = 15$, $n(A - B) = 7$ 일 때, 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12개

해설

색칠한 부분이 나타내는 집합은
 $(A \cap B)^c = U - (A \cap B)$ 이다.
 $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ 이므로
 $n(A \cap B) = 15 - 7 = 8$ 이다.
따라서 $n(U) - n(A \cap B) = 20 - 8 = 12$ 이다.

6. 원 $x^2+y^2-2kx+ky+3k=0$ 의 중심이 $(4,-2)$ 일 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심이 $(4,-2)$ 이므로

$$(x-4)^2+(y+2)^2=r^2$$

$$x^2+y^2-8x+4y+20-r^2=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때, 원 $\textcircled{1}$ 과 원 $x^2+y^2-2kx+ky+3k=0$ 이 같으므로

$$-2k=-8, \quad k=4$$

$$3k=20-r^2$$

$$\therefore k=4, \quad r=2\sqrt{2} (\because r>0)$$

따라서, 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$

7. 세 점 $P(-1, 4)$, $Q(3, 6)$, $R(0, -3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 외접원의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 - x - 2y - 3 = 0$
② $x^2 + y^2 + 2x - 1y - 10 = 0$
③ $x^2 + y^2 - 4x - 5y - 8 = 0$
④ $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$
⑤ $x^2 + y^2 - 6x - 5y - 20 = 0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓으면 이 원이

세 점 $P(-1, 4)$, $Q(3, 6)$, $R(0, -3)$ 을 지나므로 차례로 대입하면

$$1 + 16 - A + 4B + C = 0 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$9 + 36 + 3A + 6B + C = 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$9 - 3B + C = 0 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$, $\textcircled{㉢}$ 을 연립하여 풀면

$$A = -6, B = -2, C = -15$$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

8. 방정식 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + c = 0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 c 의 값의 범위를 정하면?

① $c < 1$ ② $c < 2$ ③ $c < 3$ ④ $c < 4$ ⑤ $c < 5$

해설

주어진 방정식을 변형하면

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 5 - c$$

$$\therefore (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - c \quad \leftarrow \quad 5 - c = r^2$$

이 방정식의 그래프가 원이 되려면

$$5 - c > 0 \quad \leftarrow \quad r^2 > 0$$

$$\therefore c < 5$$

9. 중심이 직선 $y = x + 2$ 위에 있고, 점 $(4, 4)$ 를 지나며, y 축에 접하는 원 중 반지름의 크기가 작은 원의 방정식을 구하면?
- ① $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$
- ② $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$
- ③ $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$
- ④ $(x - 10)^2 + (y - 12)^2 = 100$
- ⑤ $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 100$

해설

원의 방정식을 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2$ 으로 놓으면
중심 (a, b) 가 $y = x + 2$ 위에 있으므로
 $b = a + 2$ ㉠
점 $(4, 4)$ 를 지나므로
 $(4 - a)^2 + (4 - b)^2 = a^2$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $(4 - a)^2 + (4 - a - 2)^2 = a^2$
 $a^2 - 12a + 20 = 0 \quad \therefore a = 2, 10$
 $\therefore a = 2$ 일 때 $b = 4$, $a = 10$ 일 때 $b = 12$
따라서 구하는 방정식은
 $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$,
 $(x - 10)^2 + (y - 12)^2 = 100$

10. 다음 두 원의 위치관계 중 서로 다른 두 점에서 만나는 경우를 모두 고른 것은?

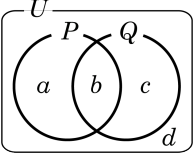
- ㉠ $x^2 + y^2 = 1, \quad (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
- ㉡ $(x + 1)^2 + y^2 = 2, \quad x^2 + (y + 3)^2 = 2$
- ㉢ $x^2 + y^2 = 2, \quad (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$
- ㉣ $x^2 + y^2 = 4, \quad (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$
- ㉤ $x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

- ① ㉠
- ② ㉠, ㉤
- ③ ㉡
- ④ ㉢, ㉣
- ⑤ ㉡, ㉤

해설

서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는
 $|r - r'| < d < |r + r'|$ 이어야 한다.
㉠ 만나지 않는다.
㉢ 내접한다.
㉤ 외접한다.

11. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계가 다음과 같을 때, 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보여주는 원소는 무엇인가?



- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ a 와 c

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다. $P \subset Q \leftrightarrow x \in P$ 이면 $x \in Q$ P 의 원소 a 에 대하여 $a \in P$ 이나 $a \notin Q$ 이므로 $p \rightarrow q$ 는 거짓이다.

12. 실수 x 에 대하여 $x+1=0$ 이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건일 때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+1=0$ 이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건이므로 명제 ‘ $x+1=0$ 이면 $x^2+2x+a=0$ 이다.’가 참이다.
 $x+1=0$ 에서 $x=-1$ 을 $x^2+2x+a=0$ 에 대입하면
 $(-1)^2+2\cdot(-1)+a=1-2+a=0$
 $\therefore a=1$

13. $q > p > 1$ 인 실수 p, q 에 대하여 $pq + p$ 와 $p^2 + q$ 의 대소를 비교하면?

① $pq + p < p^2 + q$

② $pq + p \leq p^2 + q$

③ $pq + p > p^2 + q$

④ $pq + p \geq p^2 + q$

⑤ $pq + p = p^2 + q$

해설

$$\begin{aligned}(pq + p) - (p^2 + q) &= pq - q - p^2 + p \\ &= q(p - 1) - p(p - 1) \\ &= (p - 1)(q - p)\end{aligned}$$

$q > p > 1$ 이므로 $p - 1 > 0$, $q - p > 0$

따라서 $(p - 1)(q - p) > 0$ 이므로

$$pq + p > p^2 + q$$

14. 양수 x 에 대하여 $\frac{x^2+2x+2}{x}$ 는 $x = a$ 에서 최솟값 b 를 가질 때, $-2a + b + 1$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2+2x+2}{x} = x + 2 + \frac{2}{x}$$

$$x + \frac{2}{x} + 2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

(단, 등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2} + 2$ 이므로 $b = 2\sqrt{2} + 2$

등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립하므로 $a = \sqrt{2}$

따라서 $-2a + b + 1 = -2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} + 2) + 1 = 3$

15. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 3^2$, $(x-9)^2 + y^2 = 2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 4개

해설

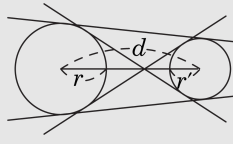
먼저 두 원의 반지름의 길이의
합 $r + r'$, 차 $r \sim r'$, 중심거리 d 를 구하
여

두 원의 위치관계를 파악한다.

두 원의 반지름의 길이를 각각 $r = 3, r' = 2$ 로 놓으면

 $r + r' = 5, r \sim r' = 1 \quad d = 9$ 이므로

$r+r'=5, r \sim r'=1, d=9$ 이므로
 $r+r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두
 4 개



16. 중심이 C(1, 2)이고, 직선 L : $x + 2y = 0$ 에 접하는 원의 반지름을 r 이라 할 때 r^2 은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

중심에서 접선까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로

$$\text{반지름은 } \frac{|1 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

∴ 구하는 원의 방정식은

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 \text{ 이므로}$$

$$\therefore r^2 = 5$$

17. 직선 $ax + (1-a)y - 1 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$ 의 넓이를 이등분할 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{5}{2}$

④ $\frac{7}{2}$

⑤ $\frac{9}{2}$

해설

직선 $ax + (1-a)y - 1 = 0$ 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 한다.

$x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$ 에서

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

직선의 방정식에 대입하면

$$\frac{1}{2}a + (1-a)\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

18. 자연수 k 의 양의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k 라 할 때, $A_2 \cap (A_4 \cup A_8)$ 을 간단히 하면?

① A_2

② A_3

③ A_4

④ A_5

⑤ A_6

해설

$$A_2 \cap (A_4 \cup A_8) = A_2 \cap A_4 = A_4 \quad (\because A_4 \subset A_2)$$

19. 다음 명제 중 참인 것의 개수를 구하면?

- ㉠

$2a^2 - 3b^2 = ab$ 이면 $a + b = 0$ 이다.
- ㉡

x 가 무리수 이면 x 는 무한소수이다.
- ㉢

무한소수는 분수로 나타낼 수 없다.
- ㉣

x 가 3 의 배수이면 $x + 1$ 은 짝수이다.
- ㉤

사각형의 대각선이 직교하면 마름모이다.

- ㉠

1개
- ㉡

2개
- ㉢

3개
- ㉣

4개
- ㉤

0개

해설

㉠ $2a^2 - ab - 3b^2 = 0$, $(a + b)(2a - 3b) = 0$
∴ $a + b = 0$ 또는 $2a - 3b = 0$ 이므로 거짓
㉡ 무리수는 순환하지 않는 무한소수이므로 참
㉢ 순환하는 무한소수는 유리수이므로 거짓
㉣ 반례 : $x = 6$ 일 때 $x + 1 = 7$ (홀수)
㉤ 대각선이 직교하는 사각형이 모두 마름모는 아니다. 정사각형도 있다.
∴ ㉡만 참이다.

20. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로

$$\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right) = 16 \cdot \frac{x}{y} + 2xy + \frac{8}{xy} + \frac{y}{x} \text{ 에서}$$

$$16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{16 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 8$$

$$2xy + \frac{8}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{2xy \cdot \frac{8}{xy}} = 8$$

$$\therefore 16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy + \frac{8}{xy} \geq 16$$

21. 두 정점 $A(-\sqrt{2}, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0)$ 가 있다. 조건 $2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$ 를 만족시키는 점 $P(x, y)$ 의 자취는 원이다. 이 원의 반지름은?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

$$2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$$
$$2\{(x + \sqrt{2})^2 + y^2\} - \{(x - \sqrt{2})^2 + y^2\} = 9$$

이것을 정리하면, $(x + 3\sqrt{2})^2 + y^2 = 25$
점 P 의 자취는 점 $(-3\sqrt{2}, 0)$ 을 중심으로 하고,
반지름이 5 인 원이다.

22. 두 집합 $A = \{3, a, a + 2\}$, $B = \{3, 5, b\}$ 에 대하여, $A = B$ 일 때, 가능한 a, b 의 값은? (단, $a \neq b$)

- ① $a = 2, b = 3$
- ② $a = 3, b = 5$
- ③ $a = 4, b = 5$
- ④ $a = 5, b = 7$
- ⑤ $a = 6, b = 9$

해설

$A = B$ 이고, $5 \in B$ 이므로 $5 \in A$
 $a = 5$ 또는 $a + 2 = 5$
(i) $a = 5$ 일 때,
 $A = \{3, 5, 7\}, B = \{3, 5, 7\} \therefore b = 7$
(i) $a + 2 = 5$ 일 때, $a = 3$
 $A = \{3, 3, 5\}, B = \{3, 5, 3\} \therefore b = 3$
(단 $a \neq b$) 이므로 성립할 수 없다.
따라서 가능한 a, b 의 값은 $a = 5, b = 7$ 이다.

23. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B, A \neq B$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $n(A) < n(B)$
- ② $B = \{1, 2, 3\}$ 일 때, 집합 A 의 개수는 8개이다.
- ③ $n(B) = 3$ 이면 $n(A) = 1$ 이다.
- ④ $n(A) + 2 = n(B)$
- ⑤ $n(A) = n(B)$

해설

- ① A 는 B 의 진부분집합이므로 $n(B) \geq n(A) + 1$ 이다. 따라서 $n(A) < n(B)$ 가 된다.
- ② $B = \{1, 2, 3\}$ 일 때, 집합 A 의 개수는 자기 자신을 제외해야 하므로 7개이다.
- ③ A 는 B 의 진부분집합이므로 $n(B) = 3$ 이면 $n(A) \leq 2$ 이다.
- ④, ⑤ A 는 B 의 진부분집합이므로 $n(B) > n(A)$ 이다.

24. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 포함하는 것의 개수를 구하면?

① 32 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 120

해설

‘적어도~’문제에서는 반대의 경우의 수를 구하여 모든 경우의 수에서 빼준다.

모든 부분집합의 수 : $2^6 = 128$ 짝수로만 만들 수 있는 부분집합의 수 : $2^3 = 8$

$\therefore 128 - 8 = 120$

25. 집합 $A = \{x|x \text{는 } 15 \text{의 약수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $(A \cup B) \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 8개

해설

$A = \{1, 3, 5, 15\}, B = \{1, 3, 9\}$ 이므로
 $A \cap B = \{1, 3\}$
 $A \cup B = \{1, 3, 5, 9, 15\}$
 $(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$
 $(A \cap B) \cup X = X$ 이므로 $(A \cap B) \subset X$
 $\therefore (A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$
 X 는 원소 1, 3 을 포함하는
 $\{1, 3, 5, 9, 15\}$ 의 부분집합이므로
 (집합 X 의 갯수) $= 2^{5-2} = 2^3 = 8(\text{개})$