1. 다음 중 무한집합을 모두 골라라.

> ㉠ $A = \{x \mid x$는 아시아에 속하는 국가$\}$
>
> ㉡ $B = \{x \mid x$는 100보다 큰 자연수$\}$
>
> ㉢ $C = \{x \mid x$는 20 이상의 자연수$\}$
>
> ㉣ $D = \{x \mid x$는 방위의 종류$\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉢

해설

㉠ $A = \{$대한민국, 일본, 중국, $\cdots$, 싱가포르$\}$: 유한집합
㉡ $B = \{100, 101, 102, \cdots\}$: 무한집합
㉢ $C = \{20, 21, 22, 23, 24, \cdots\}$: 무한집합
㉣ $D = \{$동, 서, 남, 북$\}$: 유한집합

2. 다음 중 8의 배수의 집합의 부분집합을 골라라.

㉠ 1의 배수의 집합	㉡ 13의 배수의 집합
㉢ 9의 배수의 집합	㉣ 16의 배수의 집합
㉤ 20의 배수의 집합	

▶ 답:

▷ 정답: ㉣

해설

8의 배수의 집합을 원소나열법으로 나타내면 {8, 16, 24, ···}이다.
따라서 16의 배수의 집합은 8의 배수의 집합이다.

3. 집합 $A = \{1,\ 10\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$A = \{1,\ 10\}$ 이므로 A 의 부분집합의 개수는 원소의 개수만큼 2 를 곱한 값과 같다.
따라서 A 의 부분집합의 개수는 $2^2 = 2 \times 2 = 4$ (개) 이다.

4. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 10 이하의소수$\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ 일 때, $n(A \cup B)$는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

$A = \{2, 3, 5, 7\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\therefore n(A \cup B) = 8$

5. $a > b > 0$일 때, 다음 $2a+b,\ a+2b$의 대소를 비교하면?

① $2a+b < a+2b$　② $2a+b \le a+2b$

③ $2a+b > a+2b$　④ $2a+b \ge a+2b$

⑤ $2a+b = a+2b$

해설

$(2a+b)-(a+2b) = a-b > 0$

$\therefore 2a+b > a+2b$

6. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.
그 점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a<0, b<0$)

$$(x^2+y^2+2x+3y-1)m+(x^2+y^2+2x+2y-3)=0$$

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.
$x^2+y^2+2x+3y-1=0$,
$x^2+y^2+2x+2y-3=0$
연립하여 풀면 $(x, y)=(-3,-2),(1,-2)$
그러므로 $(a, b)=(-3,-2)$

7. 원 $x^2+y^2=4$ 과 직선 $y=2x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$ ② $-3\sqrt{5} < k < 3\sqrt{5}$

③ $-4\sqrt{5} < k < 4\sqrt{5}$ ④ $k < -\sqrt{5}$ 또는 $k > \sqrt{5}$

⑤ $k < -2\sqrt{5}$ 또는 $k > 2\sqrt{5}$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|0+0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 2 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} < 2 \quad \therefore -2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$$

8. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

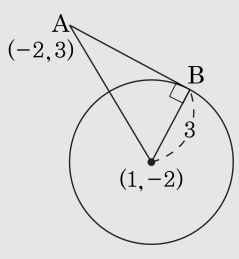
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2}=5$



9. 다음 중 집합인 것은?

① 키가 큰 학생들의 모임

② 1보다 작은 자연수의 모임

③ 100에 가장 가까운 수들의 모임

④ 아름다운 꽃들의 모임

⑤ 유명한 성악가의 모임

해설

② 1보다 작은 자연수의 모임은 공집합이므로 집합이다.
①, ③, ④, ⑤는 기준이 명확하지 않아 집합이 아니다.

10. 명제「$p \to \sim q$」가 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $p \to q$　② $q \to p$　③ $\sim p \to q$

④ $q \to \sim p$　⑤ $\sim q \to \sim p$

해설

주어진 명제가 참이므로 대우「$q \to \sim p$」도 참이다.

11. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

• $\|a\| = \|b\|$ 는 $a = b$ 이기 위한 (가) 조건이다. • 3의 배수는 6의 배수이기 위한 (나) 조건이다.

① 필요, 필요 ② 필요, 충분

③ 충분, 충분 ④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$|a| = |b|$ $a = b$ ∴ 필요

$\{x \mid x$는 3의 배수$\} \supset \{x \mid x$는 6의 배수$\}$ ∴ 필요

12. $x>0, y>0$ 일 때, $\left(3x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{6}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$\left(3x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{6}{x}\right)=20+3\left(xy+\frac{4}{xy}\right)$

산술기하조건을 사용하면

$xy+\frac{4}{xy}\geq 2\sqrt{xy\times\left(\frac{4}{xy}\right)}=4$

$\therefore$ 최솟값 : $20+3\times 4=32$

13. $x > 3$일 때 $\dfrac{3}{x-3} + 2 + 3x$의 최솟값은?

① 3 ② 5 ③ 12 ④ 15 ⑤ 17

해설

$$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

이 때, $x > 3$이므로 $3(x-3) > 0$, $\dfrac{3}{x-3} > 0$

산술평균과 기하평균에 의해

$$3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$
$$\geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11$$
$$= 2 \cdot 3 + 11 = 17$$

(단, 등호는 $3(x-3) = \dfrac{3}{x-3}$, 즉 $x = 4$일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

14. 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x^2+y^2+z^2=6$일 때 $x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z$의 최댓값 M과 최솟값 m은?

① $M=3,\ m=0$　② $M=3, m=-3$

③ $M=6, m=0$　④ $M=6, m=-6$

⑤ $M=6, m=-12$

해설

$x,\ y,\ z$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$\left\{1+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right\}(x^2+y^2+z^2)$
$\geq (x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$
$36 \geq (x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$
$-6 \leq x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z \leq 6$
$\therefore M=6,\ m=-6$

15. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,-4), \mathrm{B}(5,8)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} \perp \overline{\mathrm{BP}}$ 를 만족하는 점 P 의 자취의 방정식은?

① $(x-3)^2+(y-2)^2=160$ ② $(x-3)^2+(y+2)^2=160$

③ $(x-2)^2+(y-3)^2=40$ ④ $(x+3)^2+(y+2)^2=40$

⑤ $(x-3)^2+(y-2)^2=40$

해설

$\overline{\mathrm{AP}} \perp \overline{\mathrm{BP}}$ 를 만족하는 점 P 의 자취는
두 점 $\mathrm{A}(1,-4), \mathrm{B}(5,8)$ 을 잇는
선분 AB 를 지름으로 하는 원이므로
이 원의 중심을 (a,b) 라 하면

$a=\dfrac{1+5}{2}=3,\ b=\dfrac{-4+8}{2}=2$

또, 반지름의 길이 r 는

$r=\dfrac{\sqrt{(5-1)^2+\{8-(-4)\}^2}}{2}=2\sqrt{10}$

따라서, 점 P 의 자취의 방정식은
$(x-3)^2+(y-2)^2=40$

16. 두 원 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$, $(x+3)^2+(y-4)^2=4$가 외접할 때, r의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

두 원 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$, $(x+3)^2+(y-4)^2=4$의 중심 사이의 거리 $d=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$
두 원이 외접하면 $r+2=5$이므로 $r=3$

17. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2+y^2-2x+4y+1=0, \quad 3x-4y+6=0$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

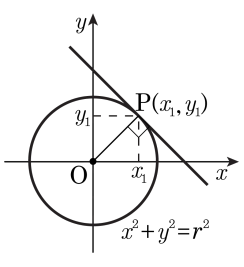
원의 방정식을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$
따라서 , 원의 중심 $(1,-2)$ 에서 직선
$3x-4y+6=0$ 까지의 거리 d 는

$$d=\frac{|17|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{17}{5}$$

이때, $\frac{17}{5}>2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

∴ 교점의 개수 : 0 개

18. 다음은 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식이 $x_1x+y_1y=r^2$ 임을 보인 과정이다. (가) ~ (마) 에 들어갈 말로 옳지 <u>않은</u> 것은?



(i) P 가 $x_1 \neq 0$ 인 점이나 $y_1 \neq 0$ 인 점일 때, 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ 과 이 원의 중심 $\mathrm{O}(0,0)$ 을 지나는 직선 OP 의 기울기는 (가) 이다. 그런데 점 P 에서의 접선은 직선 OP 와 수직이므로 점 P 에서의 접선의 방정식은 (나)
이 식을 정리하면
$x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$ ·····㉠
한편, 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ 은 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로 (다)·····㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=r^2$ ·····㉢

(ii) P 가 $x_1=0$ 인 점이나 $y_1=0$ 인 점일 때,
점 P 의 좌표가 $(0, y_1)$ 또는 $(x_1, 0)$ 이므로 접선의 방정식은 (라)·····㉢′ 또는 (마)·····㉢″ 이다. 이 때, $r=|y_1|$ 또는 $r=|x_1|$ 이므로
㉢′ 또는 ㉢″ 은 ㉢과 같은 식이다.
(i), (ii) 로부터 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=r^2$

① (가) : $\dfrac{y_1}{x_1}$

② (나) : $y-y_1=\dfrac{x_1}{y_1}(x-x_1)$

③ (다) : $x_1^2+y_1^2=r^2$

④ (라) : $y=y_1$

⑤ (마) : $x=x_1$

해설

② (나) : $y-y_1=-\dfrac{x_1}{y_1}(x-x_1)$

19. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(8,0)$, $\mathrm{B}(0,6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 일 때, 세 상수 a,b,c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$\angle \mathrm{AOB}=90^\circ$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
$\overline{\mathrm{AB}}=10$ 이고 원의 중심은 $\mathrm{C}(4,3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x-4)^2+(y-3)^2=5^2$
이 식을 정리하면 $x^2+y^2-8x-6y=0$
$a=-8,\ b=-6,\ c=0$
$\therefore abc=0$

20. 집합 $B = \{x \mid x$는 9의 약수$\}$ 일 때, 집합 B 의 부분집합의 개수는?

① 4 개 ② 6 개 ③ 8 개 ④ 10 개 ⑤ 12 개

해설

$B = \{1,\ 3,\ 9\}$
집합 B 의 부분집합의 개수 : $2^3 = 8$

21. 원 $x^2+y^2=1$ 밖의 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$에서 이 원에 두 개의 접선을 그을 때 그 접점을 Q, R이라고 하자. 직선 QR의 방정식을 $ax+by=1$라 할 때 $a+b$를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

접점의 좌표를 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$라고 하면
Q, R에서의 접선의 방정식은 각각
$x_1x+y_1y=1$, $x_2x+y_2y=1$이고,
두 접선은 모두 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$를 지나므로
$3x_1+4y_1=1$, $3x_2+4y_2=1$
여기서 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$는
방정식 $3x+4y=1$의 근이며, 이 두 접점을
지나는 직선은 오직 하나뿐이므로
직선 QR의 방정식은 $3x+4y=1$이다.
$\therefore\ a=3,\ b=4 \quad \therefore\ a+b=7$

22. 두 집합 $A = \{2a,\ a+6,\ 3a-1\}$, $B = \{2a+1,\ a+2,\ 8\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$A = B$ 이므로 $8 \in A$

$2a = 8$ 또는 $a+6 = 8$ 또는 $3a-1 = 8$

(i) $2a = 8$ 일 때, $a = 4$

$A = \{8,\ 10,\ 11\}$, $B = \{6,\ 8,\ 9\}$

$A \neq B$이므로 조건에 맞지 않는다.

(ii) $a+6 = 8$ 일 때, $a = 2$

$A = \{4,\ 5,\ 8\}$, $B = \{4,\ 5\ 8\}$

$A = B$이므로 조건에 적합.

(iii) $3a-1 = 8$ 일 때, $a = 3$

$A = \{6,\ 8,\ 9\}$, $B = \{5,\ 7,\ 8\}$

$\therefore\ A \neq B$이므로 조건에 맞지 않는다. (i), (ii), (iii) 으로부터 $a = 2$

23. 두 집합 A, B가 다음과 같을 때, $X \cap A = X$, $X \cup (A \cap B) = X$를 만족하는 집합 X의 개수는?

$A = \{x \mid x$는 5 이하의 자연수$\}$, $B = \{3,\ 5,\ 7\}$

① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 10개

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $A \cap B = \{3, 5\}$, $X \cap A = X$이므로 $X \subset A$
$X \cup (A \cap B) = X$이므로 $A \cap B \subset X$
$\{3,\ 5\} \subset X \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
따라서 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 원소 3, 5를 반드시 포함하는 집합이므로
$2^{5-2} = 2^3 = 8$(개)

24. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A-B)\cup(A-B^c)=A\cap B$가 항상 성립할 때, 다음 중 두 집합 A, B의 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $A\supset B$　② $A\subset B^c$　③ $A-B=\varnothing$

④ $A\cap B=\varnothing$　⑤ $A\cup B^c=\varnothing$

해설

주어진 식을 정리하여 분배법칙을 사용한다. $(A-B)\cup(A-B^c)$
$=(A\cap B^c)\cup(A\cap(B^c)^c)=(A\cap B^c)\cup(A\cap B)=A\cap(B^c\cup B)$
$=A\cap U=A$
따라서 $A=A\cap B$ 에서 $A\subset B$ 이므로 $A-B=\varnothing$

25. 전체집합U 의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 집합연산이 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$

② $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c$

③ $(A-C)\cup(B-C)=(A\cup B)-C$

④ $(A\cup C)-(B\cup C)=A-(B\cup C)$

⑤ $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cup C)$

해설

① (좌변)
$=(A-B)\cup(A-C)$
$=(A\cap B^c)\cup(A\cap C^c)$ ($\because$ 차집합의 성질)
$=A\cap(B^c\cup C^c)$
$=A\cap(B\cap C)^c$ ($\because$ 분배법칙과 드 모르간의 법칙)
$=A-(B\cap C)$
=우변 ($\because$ 차집합의 성질)
② (우변)
$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c$
$=(A\cup B)-(A\cap B)$ ($\because$ 차집합의 성질)
벤다이어그램을 그려보면 좌변과 같음을 확인할 수 있다.
③ (좌변)
$=(A-C)\cup(B-C)$
$=(A\cap C^c)\cup(B\cap C^c)$ ($\because$ 차집합의 성질)
$=(A\cup B)\cap C^c$
$=(A\cup B)-C$ (우변) ($\because$ 분배법칙과 차집합의 성질)
④ 좌변
$=(A\cup C)-(B\cup C)$
$=(A\cup C)\cap(B\cup C)^c$ ($\because$ 차집합의 성질)
$=[A\cap(B\cup C)^c]\cup[C\cap(B\cup C)^c]$ ($\because$ 분배법칙)
$=[A\cap(B\cup C)^c]\cup[C\cap(B^c\cap C^c)]$ ($\because$ 드 모르간의 법칙)
$=[A\cap(B\cup C)^c]\cup\varnothing$
$=A\cap(B\cup C)^c$
$=A-(B\cup C)$ (우변)
⑤ 좌변
$=A-(B-C)=A\cap(B\cap C^c)^c$
$=A\cap(B^c\cup C)$ ($\because$ 차집합의 성질과 드 모르간의 법칙)
$=(A\cap B^c)\cup(A\cap C)$
$=(A-B)\cup(A\cap C)\neq$ 우변 $\rightarrow$ 모두를 벤다이어그램을 그려서 비교할 수 있다.