1. 다음 중 집합인 것을 모두 고르면?

① 예쁜 여학생들의 모임

② 큰 수의 모임

③ 우리 반에서 안경을 낀 학생들의 모임

④ 12 의 약수들의 모임

⑤ 노래를 잘 부르는 학생들의 모임

해설

예쁘다거나, 크다거나, 노래를 잘 부른다는 조건만으로는 대상을 분명히 알 수가 없다.

2. 2보다 크고 10보다 작은 짝수의 집합을 A라 할 때, 다음 □안에 들어갈 기호가 $\in$인 것을 골라라.

① $2 \square A$　② $A \square 4$　③ $6 \square A$

④ $A \square 10$　⑤ $\{4,\ 6\} \square A$

해설

$A = \{4,\ 6,\ 8\}$

① $2 \notin A$

② $A \ni 4$

③ $6 \in A$

④ $A \not\ni 10$

⑤ $\{4,\ 6\} \subset A$

3. 다음 중 무한집합을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\{x|x$는 7의 배수$\}$

② $\{x|x$는 2의 약수$\}$

③ $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \cdots\right\}$

④ $\{2, 4, 6, 8, 10, \cdots, 2000\}$

⑤ $\{x|x$는 30보다 작은 5의 배수$\}$

해설

① $\{7, 14, 21, 28, \cdots\}$ → 무한집합
② $\{1, 2\}$ → 유한집합
③ 무한집합
④ 유한집합
⑤ $\{5, 10, 15, 20, 25\}$ → 유한집합

4. 7 보다 작은 자연수의 모임을 집합 A 라 할 때, 짝수를 모두 포함하는 집합 A 의 부분집합의 개수를 구하시오.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로 집합 A 의 원소 중 짝수는 2, 4, 6 이므로 2, 4, 6 을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합의 개수는 집합 $\{1, 3, 5\}$ 의 부분집합의 개수와 같다. 따라서, 구하는 부분집합의 개수는 $2^3 = 8$(개)

5. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\{6, 7\} \cap \{6\} = \{6\}$

② $\{\triangle, \triangleright\} \cap \{\triangleright, \triangledown, \triangleleft\} = \{\triangleright\}$

③ $\{s, o, u, t, h\} \cap \{n, o, r, t, h\} = \{o, t, h\}$

④ $\{x|x\text{는 } 2\text{의 배수}\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\} = \varnothing$

⑤ $\{x|x\text{는 } 9\text{의 약수}\} \cap \{x|x\text{는 } 12\text{의 약수}\} = \{3\}$

해설

⑤ $\{x|x\text{는 } 9\text{의 약수}\} = \{1, 3, 9\}$,
$\{x|x\text{는 } 12\text{의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로
$\{1, 3, 9\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \{1, 3\}$

6. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A \cap B = \{2\}$, $B \cap A^c = \{4, 6, 8\}$일 때, 집합 B의 모든 원소의 합은?

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

해설

$A \cap B = \{2\}, B - A = \{4, 6, 8\}$

$\therefore B = \{2, 4, 6, 8\}$

원소의 합 $= 2 + 4 + 6 + 8 = 20$

7. 다음 $\square$ 안에 들어갈 것을 차례대로 적은 것은?

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - \square$$
$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - \square$$

① $n(A), n(B)$
② $n(A), n(A \cup B)$
③ $n(A \cap B), n(B)$
④ $n(A \cap B), n(A \cup B)$
⑤ $n(A \cup B), n(A \cap B)$

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

8. 어느 반의 시간표에서 화요일에 들어있는 과목은 모두 6과목, 금요일에 들어있는 과목은 모두 5과목, 화요일이나 금요일에 들어있는 과목이 9과목이다. 이 반의 화요일과 금요일에 공통으로 들어있는 과목은 몇 과목인지 구하여라.

▶ 답: 과목

▷ 정답: 2과목

해설

화요일에 들어있는 과목의 집합을 A, 금요일에 들어있는 과목의 집합을 B 라고 하자. 화요일이나 금요일에 들어있는 과목의 집합은 $A \cup B$ 이고, $n(A \cup B) = 9$ 이다.
화요일과 금요일에 공통으로 들어있는 과목의 집합은 $A \cap B$ 이다.

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 6 + 5 - 9 \\ &= 2(\text{과목}) \end{aligned}$$

따라서 화요일 금요일 공통으로 들어있는 과목은 2과목이다.

9. 명제 'x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수이다' 의 대우는?

① x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수이다.

② x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수가 아니다.

③ x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수가 아니다.

④ x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.

⑤ x 가 2의 배수가 아니면 x 는 4의 배수가 아니다.

해설

$p \to q$ 의 대우는 $\sim q \to \sim p$

10. x, y가 실수이고 $x^2+y^2=10$일 때 $x+3y$의 최댓값은?

① 5 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

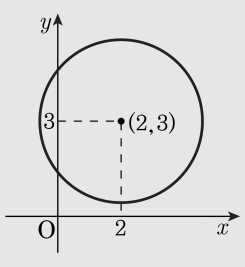
x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠 부등식에 의하여
$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$
이 때, $x^2+y^2=10$이므로
$100 \geq (x+3y)^2$
$\therefore -10 \leq x+3y \leq 10$
(단, 등호는 $x=\frac{y}{3}$일 때 성립)
따라서 최댓값은 10이다.

11. 원 $x^2+y^2-4x-6y-c=0$ 이 y 축과 만나고 x 축과는 만나지 않을 때, 정수 c 의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

원의 방정식
$x^2+y^2-4x-6y-c=0$
을 표준형으로 바꾸면
$(x-2)^2+(y-3)^2=c+13$ 이므로
중심이 $(2,3)$ 반지름의 길이가 $\sqrt{c+13}$
인 원이 된다.
다음 그림과 같이 y 축과는 만나고,
x 축과는 만나지 않으므로
$2 \le \sqrt{c+13} < 3$ 에서 $-9 \le c < -4$
$\therefore$ 정수 c 의 개수는 $-9, -8, -7, -6, -5$ 의 5 개



12. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\quad\quad), k < (\quad\quad)$

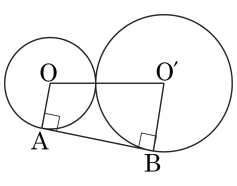
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$
또한, 준식을 표준형으로 나타내면,
$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서
$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - k$
여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

13. 다음 그림의 두 원 O 와 O′ 에서 공통 접선 $\overline{AB}$ 의 길이를 구하면?
(단, $\overline{OO'} = 5\,\text{cm}$, $\overline{OA} = 2\,\text{cm}$, $\overline{O'B} = 3\,\text{cm}$ 이다.)



① $\sqrt{6}\,\text{cm}$ ② $2\sqrt{5}\,\text{cm}$ ③ $2\sqrt{6}\,\text{cm}$
④ $\sqrt{5}\,\text{cm}$ ⑤ $3\sqrt{5}\,\text{cm}$

해설

$\overline{AB} = \sqrt{5^2 - (3-2)^2} = 2\sqrt{6}(\text{cm})$

14. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

15. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 기울기가 1 인 접선의 방정식은 $y = x \pm$ ( ) 이다. ( )안의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

직선과 원이 접하면 원의 중심에서 직선에 이르는 거리는 반지름과 같다.

$y = x + k$ 라 하면

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2, \quad k = \pm 2\sqrt{2}$$

$\therefore \quad y = x \pm 2\sqrt{2}$

16. $A = \{y \mid y = 2x - 1,\ x^2 + 2x - 3 = 0\}$ 의 원소들의 합을 구하면?

① -10 ② -6 ③ -1 ④ 5 ⑤ 9

해설

$A = \{y \mid y = 2x - 1,\ x^2 + 2x - 3 = 0\}$ 에서
$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0$ 이면
$x = -3$ 또는 $x = 1$
A는 y의 집합이므로
$x = -3$ 일 때, $y = 2 \times (-3) - 1 = -7$
$x = 1$ 일 때, $y = 2 \times 1 - 1 = 1$
$\therefore$ $-7,\ 1$ 이므로 원소들의 합은 -6

17. 집합 $A = \{x \mid |x-1| = 1\}$, $B = \{x \mid 2x - 1 < 9\}$, $C = \{x \mid -3 < x < 3\}$ 일 때, 세 집합 A, B, C 의 포함 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A \subset B \subset C$ ② $A \subset C \subset B$ ③ $B \subset A \subset C$

④ $B \subset C \subset A$ ⑤ $C \subset A \subset B$

해설

$|x-1| = 1, x-1 = \pm 1$ 이므로 $x = 0, 2$

$\therefore A = \{0, 2\}$

$B = \{x \mid 2x - 1 < 9\} = \{x \mid 2x < 10\} = \{x \mid x < 5\}$

$C = \{x \mid -3 < x < 3\}$

$\therefore A \subset C \subset B$

18. 두 집합 $A = \{3,\ a-4,\ 9\}$, $B = \{7,\ b+3,\ 10\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{7, 9\}$ 일 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

이므로

$7 \in A$ 이므로 $a-4=7 \quad \therefore a=11$

$9 \in B$ 이므로 $b+3=9 \quad \therefore b=6$

$\therefore a-b=11-6=5$

19. 명제 '$p(x)$이면 $q(x)$이다'가 참일 때, 두 집합 $P=\{x \mid p(x)\}$, $Q=\{x \mid q(x)\}$ 사이의 관계로 다음 중 옳은 것은?

① $Q \subset P$　② $Q^c \subset P$　③ $P \subset Q^c$

④ $P \cup Q = P$　⑤ $P \subset Q$

해설

'$p(x)$이면 $q(x)$이다.'가 참일 때, 즉, $p \Rightarrow q$이면 진리집합의 포함관계는 $P \subset Q$

20. 전체집합 U에서 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 한다.
$\sim p \rightarrow \sim q$가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cup Q = U$　② $P \cap Q = \phi$　③ $Q \subset P$

④ $P \subset Q$　⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 $P^c \subset Q^c \leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 대우인 $q \rightarrow p$ 가 참따라서 $Q \subset P$

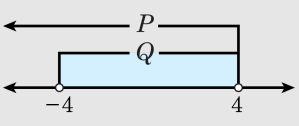
21. $x < 4$는 $-4 < x < 4$ 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$p : x < 4,\ q$: $-4 < x < 4$ 라고 하면



$\therefore Q \subset P$

22. $x+y=3$ 일 때, xy 의 최댓값을 구하여라. (단, $xy>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

$3=x+y\geq 2\sqrt{xy}$

따라서 $x=y=\frac{3}{2}$ 일 때, xy 의 최댓값 $\frac{9}{4}$

23. x가 양의 실수 일 때, $x^2+1+\frac{1}{x^2}$의 최솟값과 그 때의 x값을 차례대로 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 3

▷ 정답: 1

해설

$x^2>0,\ \frac{1}{x^2}>0$이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$x^2+1+\frac{1}{x^2}\geq 2\sqrt{x^2\times\frac{1}{x^2}}+1\geq 2+1=3$

등호는 $x^2=\frac{1}{x^2}$일 때 성립하므로 $x^4=1$

따라서 양의 실수 x는 1이다.

최솟값은 3이고, x값은 1이다.

24. a를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + 8a - 15 = 0$의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$(x+a)^2 + (y-a)^2 = 2a^2 - 8a + 15$

$= 2(a-2)^2 + 7$

$=$ (반지름)^2

따라서 $a = 2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a,\ a) = (-2,\ 2)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

25. 직선 $y = 2x + b$ 와 원 $x^2 + y^2 = 4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?

① $b < -\sqrt{5}$ 또는 $b > \sqrt{5}$ ② $b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$

③ $b < -3\sqrt{5}$ 또는 $b > 3\sqrt{5}$ ④ $b < -4\sqrt{5}$ 또는 $b > 4\sqrt{5}$

⑤ $b < -5\sqrt{5}$ 또는 $b > 5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식
$5x^2 + 4bx + b^2 - 4 = 0 \cdots\cdots$ ㉠
의 판별식을 D 라고 하면
$\frac{D}{4} = (2b)^2 - 5(b^2 - 4) = -b^2 + 20$
원과 직선이 만나지 않으려면 ㉠이
실근을 갖지 않아야 하므로
$\frac{D}{4} < 0$ 에서 $-b^2 + 20 < 0, b^2 - 20 > 0$
$\therefore b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$

26. 점 $(1,3)$ 에서 원 $x^2+y^2=1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

원의 중심과 점 $(1,3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10-1}=3$

27. 원 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 위의 점에서 직선 $y=-x+4$에 이르는 최소 거리는?

① $\sqrt{2}-1$ ② $\sqrt{2}$ ③ 3
④ $\sqrt{2}+1$ ⑤ 3

해설

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$은 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$이므로
원의 중심 $(1,1)$에서 직선 $x+y-4=0$ 까지의 거리 d는
$d=\dfrac{|1+1-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$
따라서 구하는 최소 거리는
$d-$(원의 반지름의 길이) $=\sqrt{2}-1$

28. 다음 중에서 집합 $A = \{1, 3, 5, 15\}$의 부분 집합이 아닌 것은?

① $\varnothing$　② $\{1, 3\}$　③ $\{5\}$

④ $\{1, 5, 15\}$　⑤ $\{1, 2, 10\}$

해설

집합 A의 부분집합을 구하면
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{15\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 15\}$, $\{3, 5\}$, $\{3, 15\}$, $\{5, 15\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 15\}$, $\{3, 5, 15\}$, $\{1, 5, 15\}$, $\{1, 3, 5, 15\}$이다.
따라서 $2 \notin A$, $10 \notin A$이므로 $\{1, 2, 10\}$은 집합 A의 부분집합이 아니다.

29. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하고 $\sim p$ 가 $\sim q$이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P - Q = \varnothing$　② $P \cap Q = Q$　③ $P \cap Q = P$

④ $P^c = Q$　⑤ $P = Q$

해설

$\sim p$가 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $\sim p \rightarrow \sim q$이고, 대우 $q \rightarrow p$는 참이다. 따라서, 두 진리집합 사이에는 $Q \subset P$가 성립하므로 $P \cap Q = Q$

30. A(1, 5), B(7, −1), P(x, y) 에 대하여 $\overline{AP}\perp\overline{BP}$ 임을 만족하는 자취 방정식은?

① $x^2+y^2=1$ ② $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

③ $(x-2)^2+(y+4)^2=10$ ④ $(x-3)^2+(y-4)^2=12$

⑤ $(x-4)^2+(y-2)^2=18$

해설

$\overline{AP}$ 의 기울기 : $\dfrac{y-5}{x-1}$

$\overline{BP}$ 의 기울기 : $\dfrac{y+1}{x-7}$

두 직선이 수직하면 기울기의 곱이 −1 이다.

$\Rightarrow \dfrac{y-5}{x-1}\times\dfrac{y+1}{x-7}=-1$

$\Rightarrow y^2-4y-5=-x^2+8x-7$

$\Rightarrow (x-4)^2+(y-2)^2=18$

31. 두 원 $(x-a)^2+y^2=4$, $x^2+(y-b)^2=9$가 서로 외접할 때, 점 $(a,\ b)$가 그리는 도형에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 이 도형에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이는 12이다.

② 이 도형에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이는 $6\sqrt{3}$이다.

③ 두 종류의 두형이 나타난다.

④ 이 도형의 길이는 10π이다.

⑤ 원점을 지나는 원이다.

해설

두 원이 서로 외접할 조건은 두 원의 중심을 연결한 선분의 길이가 두 원의 반지름들의 합과 같으면 된다.
원 $(x-a)^2+y^2=4$에서 중심은 $(a,\ 0)$, 반지름은 2이고, 원 $x^2+(y-b)^2=9$에서 중심은 $(0,\ b)$, 반지름은 3이다.
따라서, $(a,\ 0)$과 $(0,\ b)$ 사이의 거리가 5가 되므로 $\sqrt{a^2+b^2}=5$
$\therefore a^2+b^2=25$
그러므로 구하려는 자취는 $x^2+y^2=25$
① 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면

$2x^2=10 \therefore\ x=5\sqrt{2}$

② 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이를 y라 하면

$y=\frac{5}{2}\sqrt{3}\times 2=5\sqrt{3}$

$\therefore\ y=5\sqrt{3}$ 이다.

32. x, y가 실수이고 A, B, C를 집합이라 할 때 조건 p 가 조건 q이기 위한 필요충분조건은?

① $p : x+y \geq 2,\ q : x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$

② $p : |x|+|y| = 0,\ q : 3\sqrt{x}+3\sqrt{y} = 0$

③ $p : xy+1 > x+y > 2,\ q : x > 1$ 이고 $y > 1$

④ $p : A \subset B \subset C,\ q : A \subset B$ 또는 $A \subset C$

⑤ $p : x+y$ 가 유리수이다. $q : x,\ y$ 모두 유리수이다.

해설

① $x+y \geq 2$ $x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$ (충분조건) (반례 : $x = 3,\ y = -3$)

② $|x|+|y| = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} = 0$

여기서 $|x|+|y| = 0$ 은 $x = 0,\ y = 0$ 과 같으므로

$x = 0,\ y = 0 \rightarrow \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} = 0$ (충분조건)

(반례 : $x = 8,\ y = -8$)

③ $xy+1 > x+y > 2 \Leftrightarrow x > 1$ 이고 $y > 1$

④ $A \subset B \cup C \leftarrow A \subset B$ 또는 $A \subset C$ (충분조건)

⑤ $x+y$ 가 유리수이다. $\leftarrow x,\ y$ 모두 유리수이다.

(필요조건) (반례 : $x = 1+\sqrt{2},\ y = 1-\sqrt{2}$)

33. 이차방정식 $x^2-4x+4a=0$ (a는 실수) 이 허근을 가질 때, $a-1+\dfrac{9}{a-1}$ 의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^2-4x+4a=0$이 허근을 가지므로

$\dfrac{D}{4}=4-4a<0$

$\therefore a>1$

$\therefore (a-1)+\dfrac{9}{(a-1)} \geq 2\sqrt{(a-1)\cdot\dfrac{9}{(a-1)}}=6$

따라서 최솟값은 6