

1. 점 (5, 1)과 (-1, 7)을 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 12$

② $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 15$

③ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 18$

④ $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 21$

⑤ $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 25$

해설

두 점의 중점을 C라 하면 C(2,4)

구하는 원의 반지름의 길이는

$$r = \sqrt{(2-(-1))^2 + (4-7)^2} = \sqrt{18}$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-4)^2 = 18$$

2. 다음 중 6의 배수의 집합의 부분집합이 아닌 것은?

- ① 12의 배수의 집합
- ② 18의 배수의 집합
- ③ 20의 배수의 집합
- ④ 24의 배수의 집합
- ⑤ 36의 배수의 집합

해설

6의 배수의 집합을 원소나열법으로 나타내면 {6, 12, 18, 24, 30, 36, ...}이다.
12의 배수의 집합, 18의 배수의 집합, 24의 배수의 집합, 36의 배수의 집합은 모두 6의 배수의 집합의 부분집합이다.

3. 다음 중에서 집합 $\{1, 3\}$ 과 같은 집합을 모두 찾아라.

- ㉠

$\{3, 1\}$
- ㉡

$\{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 약수}\}$
- ㉢

$\{0, 1, 3\}$
- ㉣

$\{x \mid x \text{는 } 5 \text{이하의 홀수}\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉠

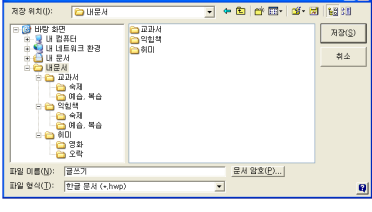
▶ 정답 : ㉡

해설

㉡, ㉣을 원소나열법으로 각각 나타내면 $\{1, 3\}, \{1, 3, 5\}$ 이다.

4. 컴퓨터에 여러 가지 파일을 종류별로 나누어 저장하기 위하여 몇 개의 폴더를 만들고, 한 폴더 안에도 다시 몇 개의 폴더를 만들어 파일을 세부적으로 분류한다.

다음 그림에서 속제 집합은 내문서 집합에 포함되고, 서로 같지는 않다. 이런 두 집합 사이의 포함 관계를 무엇이라고 하는가?



- ① 부분집합

② 진부분집합

③ 서로 같은 집합

④ 속하는 집합

⑤ 답 없음

해설

진부분집합의 또 다른 정의는 $X \subset A, X \neq A$ 이므로 $X =$ (속제), $A =$ (내문서) 라 하면 $X \subset A, X \neq A$ 가 성립한다. 따라서 진부분집합이다.

5. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 1, 2가 포함되어 있는 진부분집합의 개수는?

- ① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

$\{3, 4, 5\}$ 의 부분집합 개수 : $2^3 = 8(\text{개})$

이 중 진부분집합의 개수는 : $8 - 1 = 7(\text{개})$

6. $A = \{a, b, c, d, e\}$ 에서 원소 a 를 포함하고 b 는 포함하지 않은 부분집합의 개수는?

① 4개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 16개

해설

$$2^{5-1-1} = 2^3 = 8(\text{개})$$

7. 집합 $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 30, x \text{는 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $A - B$ 의 원소의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 5개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

$A - B = A \cap B = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\} = \{6, 12, 18, 24, 30\}$
 $\therefore 5 \text{개}$

8. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

- ① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \\ &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 \\ &= 3 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \text{에서} \\ & \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2 \\ & \sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} = 2, \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} = 2 \\ & \text{따라서 주어진 식의 최솟값은 } 3 + 6 = 9 \end{aligned}$$

9. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이
반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$$(x - k)^2 + (y + k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

반지름의 길이가 1 이므로

$$\textcircled{1} \text{에서 } -k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0, (k - 1)(k - 3) = 0$$

$$\therefore k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 합은 4이다.

10. x 축에 접하는 원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 의 중심의 좌표가 $(3, -2)$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

중심의 좌표가 $(3, -2)$ 인 원이 x 축에 접하므로
반지름의 길이는 2 이다.
따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$
 $\therefore x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$
 $\therefore a + b + c = -6 + 4 + 9 = 7$

11. 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

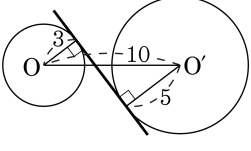
▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.
 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이고
또한 $(2, 1)$ 을 지나므로
 $(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$,
 $(r-1)(r-5) = 0$
 $\therefore r = 1$ 또는 5
 $\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$
 $\therefore 1 + 5 = 6$

12. 다음 그림의 두 원 O와 O'에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3 + 5)^2} = 6$

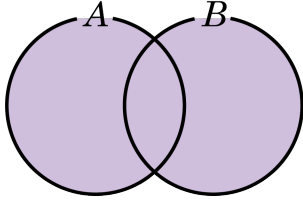
13. 집합 $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ 의 부분집합 중에서 $\{a, c, f\}$ 와 서로소인 집합의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 4개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

$$2^{6-3} = 2^3 = 8(\text{개})$$

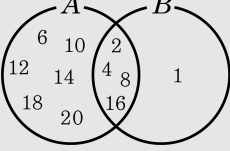
14. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 2\text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 16\text{의 약수}\}$ 일 때 다음 벤 다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



- ① $\{1, 2, 4, 8, 12\}$
- ② $\{1, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$
- ③ $\{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- ④ $\{1, 2, 4, 8, 12, 14, 16, 18\}$
- ⑤ $\{1, 2, 4, 8, 10, 20\}$

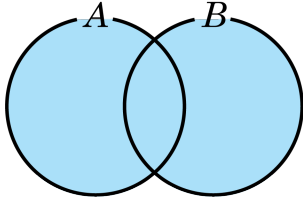
해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면
 $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$,
 $B = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ 이고,
벤 다이어그램을 그려보면 다음과 같다.



색칠한 부분이 나타나는 원소는
 $\{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ 이다.

15. 다음 벤 다이어그램에서 $n(B) = 20$, $n(A - B) = 15$ 일 때, 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 35 개

해설

색칠한 부분이 나타내는 집합은 $A \cup B$ 이다.

$A \cup B = (A - B) \cup B$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n((A - B) \cup B) \\ &= n(A - B) + n(B) \\ &= 15 + 20 \\ &= 35 \end{aligned}$$

(개) 이다.

16. $x + y = 3$ 일 때, xy 의 최댓값을 구하여라. (단, $xy > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

$$3 = x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

따라서 $x = y = \frac{3}{2}$ 일 때, xy 의 최댓값 $\frac{9}{4}$

17. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고, $a + b + c = 14$ 일 때, $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 2^2 + 3^2) \{ (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 \}$$

$$\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$$

$$(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2 \leq 14(a + b + c) = 14^2$$

이 때 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로

$$0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$$

따라서 최댓값은 14이다.

18. 직선 $y = 2x + k$ 와 원 $x^2 - 4x + y^2 = 21$ 이 만나는 두 교점 사이의 거리가 최대일 때, 상수 k 의 값은?

① -1 ② -4 ③ 4 ④ 10 ⑤ -10

해설

주어진 원은 $(x - 2)^2 + y^2 = 25$ 이므로
중심의 좌표는 $(2, 0)$ 이다. 두 교점 사이의 거리의
최댓값은 직선 $y = 2x + k$ 가 원의 중심 $(2, 0)$ 을 지날 때이므로
 $k = -4$

19. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때, $X \subset A$, $A - X = \{1, 4\}$ 를 만족하는 집합 X 의 진부분집합의 개수는 몇 개인가?

① 6 개 ② 7 개 ③ 8 개 ④ 9 개 ⑤ 10 개

해설

$A - X = \{1, 4\}$ 이므로 $X = \{2, 3, 5\}$
 $\therefore 2^3 - 1 = 7(\text{개})$

20. 다음 중 p 가 q 이기 위한 무슨 조건인지 차례대로 바르게 적은 것은?

- (가) $p : a + b, ab$ 가 정수, $q : a, b$ 가 모두 정수
(나) $p : a + b, ab$ 가 유리수, $q : a, b$ 가 모두 유리수
(다) $p : |a + b| < |a - b|, q : a < 0$ 또는 $b < 0$

- ① (가) 필요, (나) 필요, (다) 필요충분
② (가) 필요, (나) 충분, (다) 필요충분
③ (가) 필요, (나) 필요충분, (다) 충분
④ (가) 충분, (나) 필요충분, (다) 필요
⑤ (가) 충분, (나) 필요, (다) 필요충분

해설

- (가)는 $q \rightarrow p$ 가 성립하므로 필요조건이다.
(나) 역시 $q \rightarrow p$ 만 성립하므로 필요조건이다.
(다)는 $p \leftrightarrow q$ 가 성립하므로 필요충분조건이다.

21. 조건 p, q, r, s 에서 p, q 는 어느 것이나 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이라 한다. 이 때, r 은 s 이기 위한 무슨 조건인가?
- ① 필요조건

② 충분조건

③ 필요충분조건

④ 아무 조건도 아니다.

⑤ 위 사실로는 알 수 없다.

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로
 $p \Rightarrow r$ 같은 방법으로 하면
주어진 조건으로부터 $q \Rightarrow r, r \Rightarrow s, s \Rightarrow q$
 $\therefore r \Rightarrow s$ 이고 $s \Rightarrow r$ 이므로 $r \leftrightarrow s$
따라서, r 은 s 이기 위한 필요충분조건이다.

$p \Rightarrow r \Rightarrow s$

$q \Leftrightarrow s$

22. 다음 중 세 수 3^{30} , 4^{20} , 12^{15} 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $3^{30} > 4^{20} > 12^{15}$

② $4^{20} > 3^{30} > 12^{15}$

③ $12^{15} > 4^{20} > 3^{30}$

④ $3^{30} > 12^{15} > 4^{20}$

⑤ $12^{15} > 3^{30} > 4^{20}$

해설

$$\left(\frac{3^{1.5}}{4}\right)^{20} = \left(\frac{3 \times 1.7}{4}\right)^{20} > 1(3^{1.5} = 3\sqrt{3} \approx 3 \times 1.7)$$

따라서 3^{30} 이 4^{20} 보다 크다.

$$\left(\frac{3^2}{12}\right)^{15} = \left(\frac{3}{4}\right)^{15} < 1 \text{ 이 결과에서}$$

12^{15} 이 3^{30} 보다 크다는 것을 알 수 있다.

23. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 접선과 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값은?

- ① 33
- ② 35
- ③ 45
- ④ 49
- ⑤ 55

해설

점 $(3, -1)$ 에서 원에 그은 접선의 방정식을

$y + 1 = m(x - 3)$ 이라 하자.

이 때, 원의 중심에서 직선 $y + 1 =$

$m(x - 3)$,

즉 $mx - y - 3m - 1 = 0$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같으므

로

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \sqrt{5}, |3m+1| = \sqrt{5(m^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면,

$$2m^2 + 3m - 2 = 0, (2m - 1)(m + 2) = 0$$

$$\therefore m = \frac{1}{2} \text{ 또는 } m = -2$$

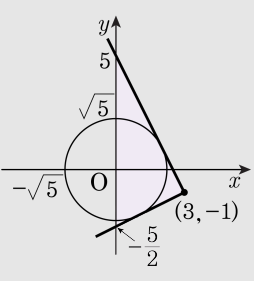
즉, 구하는 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, y = -2x + 5 \text{ 이다.}$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \times \left\{ 5 - \left(-\frac{5}{2}\right) \right\} \times 3 = \frac{45}{4} \text{ 이다.}$$

$$\therefore 4S = 45$$



24. 점 $P(a, b)$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직일 때, 점 $P(a, b)$, $Q(a, 0)$, $O(0, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 최대 넓이는?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

a, b 의 부호와 상관 없으므로

$a > 0, b > 0$ 이라 하면

$\triangle POQ$ 의 넓이 : $\frac{1}{2} \times a \times b = \frac{1}{2}ab$

P 가 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 이므로 $a^2 + b^2 = 1$

산술기하조건을 이용하면,

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \times b^2} = 2ab$$

$$ab \leq \frac{1}{2}$$

$\therefore$ 넓이의 최댓값 : $\frac{1}{4}$

25. 다음은 명제 ‘세 자연수 a, b, c 에 대하여, $a^2 + b^2 = c^2$ 이면, a, b, c 중 적어도 하나는 3의 배수이다.’의 참, 거짓을 대우를 이용하여 판별하는 과정이다.

주어진 명제의 대우는
‘세 자연수 a, b, c 에 대하여 a, b, c 모두 3의 배수가 아니면 $a^2 + b^2 \neq c^2$ ’이므로
 $a^2 + b^2 = 3m + [\text{㉠}], c^2 = 3n + [\text{㉡}]$
 $\therefore a^2 + b^2 \neq c^2$ (단, m, n 은 음이 아닌 정수) 따라서 대우가
[㉢] 이므로 주어진 명제도 [㉢] 이다.

위의 과정에서, ㉠, ㉡, ㉢에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 바르게 나열한 것은?

- ① 1, 0, 참 ② 1, 2, 거짓 ③ 2, 1, 참
- ④ 2, 0, 참 ⑤ 0, 1, 참

해설

(대우 ‘ a, b, c 모두 3의 배수가 아니라면 $a^2 + b^2 \neq c^2$ ’
이것의 참, 거짓을 증명하는 과정이다.
 $a = 3p \pm 1, b = 3q \pm 1, c = 3r \pm 1$ 이면 $a^2 = 3(3p^2 \pm 2p) + 1, b^2 = 3(3q^2 \pm 2q) + 1$ 이므로
 $a^2 + b^2 = 3m + 2$ (m 은 음이 아닌 정수)의 꼴이다.
 $\therefore [\text{㉠}] = 2$
그리고 $c^2 = 3(3r^2 \pm 2r) + 1$ 이므로
 $c^2 = 3n + 1$ (n 은 음이 아닌 정수)의 꼴이다.
 $\therefore [\text{㉡}] = 1$
 $\therefore a^2 + b^2 \neq c^2$
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
 $\therefore [\text{㉢}] = \text{참}$