1. 점 $(5,\ 1)$과 $(-1,\ 7)$을 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y-2)^2=12$ ② $(x-2)^2+(y-1)^2=15$

③ $(x-2)^2+(y-4)^2=18$ ④ $(x-2)^2+(y-6)^2=21$

⑤ $(x-4)^2+(y-6)^2=25$

해설

두 점의 중점을 C라 하면 $\mathrm{C}(2, 4)$

구하는 원의 반지름의 길이는

$r=\sqrt{(2-(-1))^2+(4-7)^2}=\sqrt{18}$

$\therefore\ (x-2)^2+(y-4)^2=18$

2. 다음 중 6의 배수의 집합의 부분집합이 아닌 것은?

① 12의 배수의 집합 ② 18의 배수의 집합

③ 20의 배수의 집합 ④ 24의 배수의 집합

⑤ 36의 배수의 집합

해설

6의 배수의 집합을 원소나열법으로 나타내면 $\{6, 12, 18, 24, 36, \cdots\}$이다.

12의 배수의 집합, 18의 배수의 집합, 24의 배수의 집합, 36의 배수의 집합은 모두 6의 배수의 집합의 부분집합이다.

3. 다음 중에서 집합 $\{1, 3\}$ 과 같은 집합을 모두 찾아라.

㉠ $\{3, 1\}$ ㉡ $\{x \mid x$는 3의 약수$\}$ ㉢ $\{0, 1, 3\}$ ㉣ $\{x \mid x$는 5이하의 홀수$\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

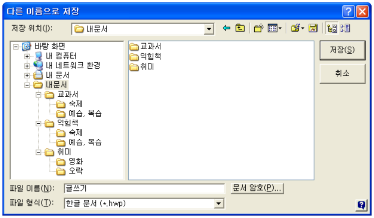
▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉡

해설

㉡, ㉣을 원소나열법으로 각각 나타내면 $\{1, 3\}, \{1, 3, 5\}$ 이다.

4. 컴퓨터에 여러 가지 파일을 종류별로 나누어 저장하기 위하여 몇 개의 폴더를 만들고, 한 폴더 안에도 다시 몇 개의 폴더를 만들어 파일을 세부적으로 분류한다.
다음 그림에서 숙제 집합은 내문서 집합에 포함되고, 서로 같지는 않다. 이런 두 집합 사이의 포함 관계를 무엇이라고 하는가?



① 부분집합

② 진부분집합

③ 서로 같은 집합

④ 속하는 집합

⑤ 답 없음

해설

진부분집합의 또 다른 정의는 $X \subset A$, $X \neq A$ 이므로 $X =$ (숙제), $A =$ (내문서) 라 하면 $X \subset A$, $X \neq A$가 성립한다. 따라서 진부분집합이다.

5. $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서 1, 2가 포함되어 있는 진부분집합의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

$\{3,4,5\}$의 부분집합 개수 : $2^3=8$(개)
이 중 진부분집합의 개수는 : $8-1=7$(개)

6. $A=\{a,b,c,d,e\}$에서 원소 a를 포함하고 b는 포함하지 않은 부분집합의 개수는?

① 4개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 16개

해설

$2^{5-1-1}=2^3=8$(개)

7. 집합 $U=\{x \mid 1 \le x \le 30,\ x$는 자연수$\}$의 두 부분집합 $A=\{x \mid x$는 3의 배수$\}$, $B=\{x \mid x$는 2의 배수$\}$에 대하여 $A-B^c$의 원소의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 5개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

$A-B^c=A\cap B=\{x \mid x$는 6의 배수$\}=\{6, 12, 18, 24, 30\}$

$\therefore$ 5개

8. 양의 실수 a, b, c사이에 대하여 $\dfrac{a+b+c}{a}+\dfrac{a+b+c}{b}+\dfrac{a+b+c}{c}$의 최솟값을 구하여라.

① 9　② 11　③ 13　④ 15　⑤ 17

해설

$\dfrac{a+b+c}{a}+\dfrac{a+b+c}{b}+\dfrac{a+b+c}{c}$

$=1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{b}+1+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}+1$

$=3+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}$에서

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=2$

$\sqrt{\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{a}{c}}=2,\ \dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\geq 2\sqrt{\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{b}{c}}=2$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $3+6=9$

9. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이 반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$(x-k)^2 + (y+k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \cdots ㉠$

반지름의 길이가 1 이므로

㉠에서 $-k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$

$k^2 - 4k + 3 = 0, (k-1)(k-3) = 0$

$\therefore k = 1$ 또는 $k = 3$

따라서 합은 4이다.

10. x 축에 접하는 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 의 중심의 좌표가 $(3,\ -2)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

해설

중심의 좌표가 $(3,\ -2)$ 인 원이 x 축에 접하므로
반지름의 길이는 2 이다.
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+2)^2=2^2$
$\therefore\ x^2+y^2-6x+4y+9=0$
$\therefore\ a+b+c=-6+4+9=7$

11. 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

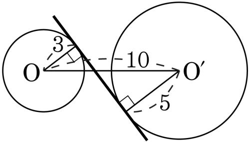
▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 $(r,\ r)$ 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

12. 다음 그림의 두 원 O와 O′ 에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3+5)^2} = 6$

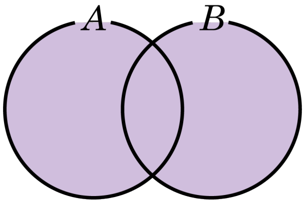
13. 집합 $X = \{a, b, c, d, e, f\}$의 부분집합 중에서 $\{a, c, f\}$와 서로소인 집합의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

$2^{6-3} = 2^3 = 8$(개)

14. 두 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } 20 \text{ 이하의 } 2\text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x\text{는 } 16\text{의 약수}\}$ 일 때 다음 벤 다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



① $\{1, 2, 4, 8, 12\}$

② $\{1, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

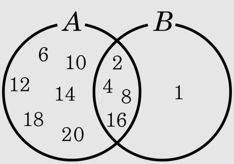
③ $\{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

④ $\{1, 2, 4, 8, 12, 14, 16, 18\}$

⑤ $\{1, 2, 4, 8, 10, 20\}$

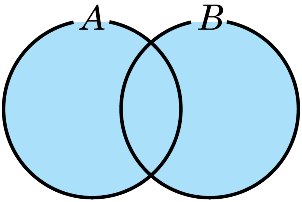
해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면
$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$,
$B = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ 이고,
벤 다이어그램을 그려보면 다음과 같다.



색칠한 부분이 나타나는 원소는
$\{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ 이다.

15. 다음 벤 다이어그램에서 $n(B) = 20$, $n(A - B) = 15$ 일 때, 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답: 개

▷ 정답: 35 개

해설

색칠한 부분이 나타내는 집합은 $A \cup B$ 이다.
$A \cup B = (A - B) \cup B$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n((A - B) \cup B) \\ &= n(A - B) + n(B) \\ &= 15 + 20 \\ &= 35 \end{aligned}$$

(개) 이다.

16. $x+y=3$ 일 때, xy 의 최댓값을 구하여라. (단, $xy>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

$3=x+y\geq 2\sqrt{xy}$

따라서 $x=y=\frac{3}{2}$ 일 때, xy의 최댓값 $\frac{9}{4}$

17. $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이고, $a+b+c=14$일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2+2^2+3^2)\left\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right\}$$

$$\geq (\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$$

$$(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2 \leq 14(a+b+c)=14^2$$

이 때 $a \geq 0,\ b \geq 0, c \geq 0$이므로

$$0 \leq \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c} \leq 14$$

따라서 최댓값은 14이다.

18. 직선 $y = 2x + k$와 원 $x^2 - 4x + y^2 = 21$이 만나는 두 교점 사이의 거리가 최대일 때, 상수 k의 값은?

① -1 ② -4 ③ 4 ④ 10 ⑤ -10

해설

주어진 원은 $(x-2)^2 + y^2 = 25$이므로
중심의 좌표는 $(2, 0)$이다. 두 교점 사이의 거리의
최댓값은 직선 $y = 2x + k$가 원의 중심 $(2, 0)$을 지날 때이므로
$k = -4$

19. 집합 $A=\{1,2,3,4,5\}$일 때, $X \subset A$, $A-X=\{1,4\}$를 만족하는 집합 X의 진부분집합의 개수는 몇 개인가?

① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

$A-X=\{1,4\}$ 이므로 $X=\{2,3,5\}$

$\therefore\ 2^3-1=7$(개)

20. 다음 중 p 가 q 이기 위한 무슨 조건인지 차례대로 바르게 적은 것은?

(가) $p: a+b,\ ab$ 가 정수, $q: a,\ b$ 가 모두 정수
(나) $p: a+b,\ ab$ 가 유리수, $q: a,\ b$ 가 모두 유리수
(다) $p: |a+b|<|a-b|$, $q: a<0$ 또는 $b<0$

① (가) 필요, (나) 필요, (다) 필요충분

② (가) 필요, (나) 충분, (다) 필요충분

③ (가) 필요, (나) 필요충분, (다) 충분

④ (가) 충분, (나) 필요충분, (다) 필요

⑤ (가) 충분, (나) 필요, (다) 필요충분

해설

(가)는 $q \rightarrow p$ 가 성립하므로 필요조건이다.
(나) 역시 $q \rightarrow p$ 만 성립하므로 필요조건이다.
(다)는 $p \leftrightarrow q$가 성립하므로 필요충분조건이다.

21. 조건 $p,\ q,\ r,\ s$에서 $p,\ q$는 어느 것이나 r이기 위한 충분조건, s는 r이기 위한 필요조건, q는 s이기 위한 필요조건이라 한다. 이 때, r은 s이기 위한 무슨 조건인가?

① 필요조건 ② 충분조건

③ 필요충분조건 ④ 아무 조건도 아니다.

⑤ 위 사실로는 알 수 없다.

해설

p는 r이기 위한 충분조건이므로
$p \Rightarrow r$ 같은 방법으로 하면
주어진 조건으로부터 $q \Rightarrow r,\ r \Rightarrow s,\ s \Rightarrow q$
$\therefore r \Rightarrow s$ 이고 $s \Rightarrow r$ 이므로 $r \leftrightarrow s$
따라서, r은 s이기 위한 필요충분조건이다.

$$\begin{tikzcd} & q \arrow[dl, Rightarrow] & \\ p \arrow[r, Rightarrow] & r \arrow[r, Rightarrow] & s \arrow[ul, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

22. 다음 중 세 수 3^{30}, 4^{20}, 12^{15} 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $3^{30} > 4^{20} > 12^{15}$

② $4^{20} > 3^{30} > 12^{15}$

③ $12^{15} > 4^{20} > 3^{30}$

④ $3^{30} > 12^{15} > 4^{20}$

⑤ $12^{15} > 3^{30} > 4^{20}$

해설

$$\left(\frac{3^{1.5}}{4}\right)^{20} = \left(\frac{3 \times 1.7}{4}\right)^{20} > 1 (3^{1.5} = 3\sqrt{3} \fallingdotseq 3 \times 1.7)$$

따라서 3^{30} 이 4^{20} 보다 크다.

$$\left(\frac{3^2}{12}\right)^{15} = \left(\frac{3}{4}\right)^{15} < 1$$ 이 결과에서

12^{15} 이 3^{30} 보다 크다는 것을 알 수 있다.

23. 점 $(3,\ -1)$ 에서 원 $x^2+y^2=5$ 에 그은 두 접선과 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값은?

① 33　② 35　③ 45　④ 49　⑤ 55

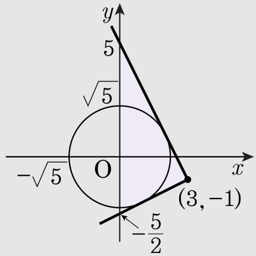
해설

점 $(3,\ -1)$ 에서 원에 그은 접선의 방정식을

$y+1=m(x-3)$ 이라 하자.

이 때, 원의 중심에서 직선 $y+1=m(x-3)$,

즉 $mx-y-3m-1=0$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같으므로



$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5},\ |3m+1|=\sqrt{5(m^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면,

$2m^2+3m-2=0,\ (2m-1)(m+2)=0$

$\therefore\ m=\frac{1}{2}$ 또는 $m=-2$

즉, 구하는 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2},\ y=-2x+5$ 이다.

따라서 구하는 삼각형의 넓이 S 는

$S=\frac{1}{2}\times\left\{5-\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}\times 3=\frac{45}{4}$ 이다.

$\therefore\ 4S=45$

24. 점 P(a, b) 가 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{P}(\mathrm{a},\mathrm{b})$, $\mathrm{Q}(\mathrm{a},0)$, $\mathrm{O}(0,0)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 최대 넓이는?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

a, b 의 부호와 상관 없으므로

$a>0$, $b>0$ 이라 하면

$\triangle\mathrm{POQ}$ 의 넓이 : $\frac{1}{2}\times a\times b=\frac{1}{2}ab$

P 가 $x^2+y^2=1$ 위의 점 이므로 $a^2+b^2=1$

산술기하조건을 이용하면,

$a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2\times b^2}=2ab$

$ab\leq\frac{1}{2}$

$\therefore$ 넓이의 최댓값 : $\frac{1}{4}$

25. 다음은 명제 '세 자연수 a, b, c에 대하여, $a^2+b^2=c^2$이면, a, b, c 중 적어도 하나는 3의 배수이다.'의 참, 거짓을 대우를 이용하여 판별하는 과정이다.

> 주어진 명제의 대우는
> '세 자연수 a, b, c 에 대하여 a, b, c 모두 3의 배수가 아니면 $a^2+b^2 \neq c^2$'이므로
> $a^2+b^2=3m+[$ ㉠ $]$, $c^2=3n+[$ ㉡ $]$
> $\therefore\ a^2+b^2 \neq c^2$ (단, m, n은 음이 아닌 정수) 따라서 대우가 [㉢]이므로 주어진 명제도 [㉢]이다.

위의 과정에서, ㉠, ㉡, ㉢에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 바르게 나열한 것은?

① $1, 0$, 참　② $1, 2$, 거짓　③ $2, 1$, 참
④ $2, 0$, 참　⑤ $0, 1$, 참

해설

(대우 'a, b, c 모두 3의 배수가 아니라면 $a^2+b^2 \neq c^2$'
이것의 참, 거짓을 증명하는 과정이다.
$a=3p\pm1$, $b=3q\pm1$, $c=3r\pm1$ 이면 $a^2=3(3p^2\pm2p)+1$, $b^2=3(3q^2\pm2q)+1$ 이므로
$a^2+b^2=3m+2$ (m 은 음이 아닌 정수)의 꼴이다.
$\therefore [$ ㉠ $]=2$
그리고 $c^2=3(3r^2\pm2r)+1$ 이므로
$c^2=3n+1$ (n은 음이 아닌 정수)의 꼴이다.
$\therefore [$ ㉡ $]=1$
$\therefore a^2+b^2 \neq c^2$
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
$\therefore [$ ㉢ $]=$ 참