1. 다음 이차방정식 중에서 한 근이 $x = -1 + \sqrt{3}$ 인 것은?

① $(x+1)^2 = -3$　② $(x+1)^2 = 3$　③ $(x+3)^2 = -1$

④ $(x+3)^2 = 1$　⑤ $(x-1)^2 = 1$

해설

$(x+a)^2 = b$ 에서 $x + a = \pm\sqrt{b}$

$\therefore x = -a \pm \sqrt{b}$ 임을 이용해 각 방정식을 풀면

① $x = -1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm \sqrt{3}i$

② $x = -1 \pm \sqrt{3}$

③ $x = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$

④ $x = -3 \pm \sqrt{1}$

$\therefore x = -4$ 또는 $x = -2$

⑤ $x = 1 \pm \sqrt{1}$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$

2. 이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$이 중근을 가질 때, 실수 k의 값은?

① 1　　② 3　　③ 6　　④ 9　　⑤ 36

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로

$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 1 \cdot k = 0$

$\therefore\ k = 9$

3. 이차방정식 $x^2 - 2x + m = 0$이 허근을 가질 때, 실수 m의 범위를 구하면?

① $m < 1$
② $-1 < m < 1$
③ $m < -1$ 또는 $m > 1$
④ $m > 1$
⑤ $m > -1$

해설

주어진 이차방정식이 허근을 가지려면
$D/4 = 1 - m < 0$
$\therefore m > 1$

4. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 일 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

두근의 합 : 3, 두근의 곱 : 1

$\therefore \ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= 7$

5. 한 근이 $1-i$ 인 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$ 일 때, 실수 $a+b$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

한 근이 $1-i$ 이면 다른 한 근은 $1+i$ 이다.
두 근의 합 : 2,
두 근의 곱 : 2
$\therefore\ a=-2\ ,\ \ b=2$

6. 방정식 $|x-1| = 2$ 의 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -1

해설

i) $x \geq 1$ 일 때
$|x-1| = x-1$ 이므로, $x-1 = 2$
$\therefore x = 3$
ii) $x < 1$ 일 때
$|x-1| = -x+1$ 이므로, $-x+1 = 2$
$\therefore x = -1$
따라서 (i), (ii) 에서 $x = 3$ 또는 $x = -1$

7. x에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2+2kx+k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

(i) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $k-1 \neq 0$이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=k^2-(k-1)^2>0,\ 2k-1>0$$

$$\therefore k>\frac{1}{2}$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

8. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + b - 3 = 0$이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a = 1, b = 2$　② $a = 0, b = 3$　③ $a = -1, b = 2$

④ $a = 0, b = 2$　⑤ $a = -1, b = 3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.

$D' = (k-a)^2 - (k^2 + b - 3) = 0$

$\Rightarrow \quad -2ak + a^2 - b + 3 = 0$

모든 k 에 대해 성립하려면

$-2a = 0,\ a^2 - b + 3 = 0$

$\therefore \quad a = 0, b = 3$

9. x에 대한 이차식 $2x^2+(k+1)x+k-1$이 완전제곱식이 될 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2x^2+(k+1)x+k-1$이 완전제곱식이므로
$D=(k+1)^2-8(k-1)=0$
$(k-3)^2=0$
$\therefore\ k=3$

10. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a=2+3$, $a=-5$

$b=2\cdot 3=6$

$\therefore\ -5x^2+6x+3=0$에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

11. 이차방정식 $2x^2-6x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $2x^2-6x+1=0$　　② $x^2-6x+1=0$

③ $x^2-7x+3=0$　　④ $2x^2+6x-1=0$

⑤ $2x^2-7x+3=0$

해설

근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=\frac{6}{2}=3$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$ 이므로

3 과 $\frac{1}{2}$을 이용한 근과 계수의 관계를 구해보면

$3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$, $3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=0$

$\therefore\ 2x^2-7x+3=0$

12. 이차식 $2x^2-4x+3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$
② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$
③ $(x+3)(2x-1)$
④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$
⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$a=2, b'=-2, c=3$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4-6}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

13. 방정식 $a(ax-1)=2(ax-1)$ 에 대한 설명으로 옳은 것은?

① $a=0$ 일 때, 부정
② $a=2$ 일 때, 불능
③ $a\neq 2$ 일 때, $x=\frac{1}{a}$
④ $a\neq 0$ 일 때, 해는 없다.
⑤ $a\neq 0,\ a\neq 2$ 일 때, $x=\frac{1}{a}$

해설

$a(ax-1)=2(ax-1), a^2x-2ax=a-2$ 에서
$a(a-2)x=a-2$
i) $a\neq 0,\ a\neq 2$ 일 때, $x=\frac{1}{a}$
ii) $a=2$ 일 때, $0\cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다. (부정)
iii) $a=0$ 일 때, $0\cdot x=-2$ 이므로 해가 없다. (불능)
따라서 옳은 것은 ⑤뿐이다.

14. 다음 방정식을 풀면?

$(2-\sqrt{3})x^2+(1-\sqrt{3})x-1=0$

① $x=-1$ 또는 $-\sqrt{3}$
② $x=-1$ 또는 $-2+\sqrt{3}$
③ $x=-1$ 또는 $2+\sqrt{3}$
④ $x=1$ 또는 $2-\sqrt{3}$
⑤ $x=1$ 또는 $=2+\sqrt{3}$

해설

주어진 식의 양변에 $2+\sqrt{3}$ 을 곱하면
$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})x^2+(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})x-(2+\sqrt{3})=0$
$x^2-(1+\sqrt{3})x-(2+\sqrt{3})=0$
$(x+1)\left\{x-(2+\sqrt{3})\right\}=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2+\sqrt{3}$

15. 이차방정식 $(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 해는 $x=a$ 또는 $x=p+qi$이다. 이 때, $a+p+q$의 값을 구하여라. (단, a, p, q는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)(-3+i)x+2(1+i)=0$

$2x^2-2(2+i)x+2(1+i)=0$

$x^2-(2+i)x+1+i=0$

$(x-1)\{x-(1+i)\}=0$

$x=1$ 또는 $x=1+i$

$\therefore a+p+q=3$

16. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때

$x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x+1)(x-3) = 0$

$x = -1$ 또는 $x = 3$

그런데 $x \geq 0$이므로 $x = 3$

ⅱ) $x < 0$일 때

$x^2 + 2x - 3 = 0$, $(x-1)(x+3) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = -3$

그런데 $x < 0$이므로 $x = -3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$

따라서 근의 합은 0이다.

17. $1 < x < 3$인 x에 대하여 방정식 $x^2 - [x]x - 2 = 0$의 해를 구하여라.
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① 2　　② $1 + \sqrt{2}$　　③ $1 + \sqrt{3}$
④ $\sqrt{5} - 1$　　⑤ $2\sqrt{2} - 1$

해설

(i) $1 < x < 2$일 때, $[x] = 1$
준식은 $x^2 - x - 2 = 0$, $(x-2)(x+1) = 0$
$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$
그런데 $1 < x < 2$이므로 만족하는 해가 없다.
(ii) $2 \le x < 3$일 때, $[x] = 2$
준식은 $x^2 - 2x - 2 = 0$이고 근의 공식에 의하여 $x = 1 \pm \sqrt{3}$
그런데 $2 \le x < 3$이므로 만족하는 해는
$x = 1 + \sqrt{3}$

18. 방정식 $\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x-\frac{1}{2}\right]-7=0$의 해 $a \le x < b$ 또는 $c \le x < d$에 대하여 $a+b+c+d$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\left[x-\frac{1}{2}\right]=\left[x+\frac{1}{2}\right]-1$이므로

$\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x+\frac{1}{2}\right]-4=0$

$\left[x+\frac{1}{2}\right]=4$또는 $\left[x+\frac{1}{2}\right]=-1$이므로

$\frac{7}{2} \le x < \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \le x < -\frac{1}{2}$이다

따라서 구하는 값은

$\therefore a+b+c+d=6$

19. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$의 두 근이 3, b일 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 28

해설

$x = 3$이 $x^2 - ax + 12 = 0$의 근이므로
$9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore\ a = 7$
이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$에서 $(x-3)(x-4) = 0$
그러므로 $x = 3$ 또는 $x = 4$
$\therefore\ b = 4 \quad \therefore\ ab = 28$

20. $x^2-2x+3=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$
$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$
$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$
$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$
$=9-6\cdot 2+12=9$

21. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에 대한 설명으로 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, $a,\ b,\ c,\ p,\ q$ 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

보기

㉠ 판별식은 b^2-4ac 이다.

㉡ 두 근의 합은 $\frac{b}{a}$ 이다.

㉢ $a<0,\ c<0$ 이면 허근만 갖는다.

㉣ $a>0,\ c<0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.

㉥ 한 근이 $p+qi$ 이면 다른 한 근은 $q-pi$ 이다.

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

㉠ 실계수 방정식에서만 판별식을 사용할 수 있다. 현재 a,b,c 가 실수이므로 판별식 사용 가능(참)

㉡ 두근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다. (거짓)

㉢ b^2-4ac 에서 $ac>0$ 이다.
하지만 $b^2<4ac$ 인 경우만 허근을 가짐(거짓)

㉣ 판별식 b^2-4ac 에서 $ac<0$ 이므로 $b^2-4ac>0$ (참)

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다. (참)

㉥ 실계수 방정식에서 한 근이 $p+qi$ 이면 $p-qi$ 가 또 다른 한 근이다.(거짓)

22. x에 대한 이차방정식 $(a+1)x^2-4x+2=0$에 대하여 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a=1$일 때, 중근을 갖는다.

㉡ $a>1$일 때, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉢ $a<1$일 때, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a \neq -1$일 때, 주어진 방정식은 이차방정식이다.
서로 다른 두 실근을 가질 때
$\frac{D}{4}=4-2(a+1)=2-2a>0$
$\therefore a<1$
따라서 $a<-1$ 또는 $-1<a<1$일 때,
서로 다른 두 실근을 갖는다.
중근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a=0$
$\therefore a=1$
따라서, $a=1$일 때, 중근을 갖는다.
서로 다른 두 허근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a<0$
$\therefore a>1$
따라서 $a>1$일 때 서로 다른 두 허근을 갖는다.

23. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$\dfrac{D}{4}=4+6k<0$

$\therefore\ k<-\dfrac{2}{3}$ ······㉠

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$D=25+8k\geq 0$

$\therefore\ k\geq -\dfrac{25}{8}$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $-\dfrac{25}{8}\leq k<-\dfrac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

24. 이차방정식 $x^2+2(m-1)x-2m-6=0$의 근 중 양근의 절대값이 음근의 절대값보다 클 때 실수 m의 범위는 ?

① $m<1$
② $-3<m<1$
③ $m<-3$ 또는 $m>1$
④ $m>-3$
⑤ $m<-1$

해설

근과 계수와의 관계에서
$\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta<0$
($\because$ 양근의 절대값이 음근의 절대값보다 크다.)

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-2(m-1)>0 & \therefore\ m<1\\ \alpha\beta=-2m-6<0 & \therefore\ m>-3\end{cases}$$

$\therefore\ -3<m<1$

25. x에 대한 이차방정식 $x^2-(k-3)x+k+2=0$의 두 근이 모두 양수일 때 실수 k의 값의 범위는?

① $k \geq -5-2\sqrt{6}$ ② $k \geq -5+2\sqrt{6}$ ③ $k \geq -5+\sqrt{6}$

④ $k \geq 5+\sqrt{6}$ ⑤ $k \geq 5+2\sqrt{6}$

해설

$x^2-(k-3)x+k+2=0$에서

$D=(k-3)^2-4(k+2)$

$=k^2-6k+9-4k-8$

$=k^2-10k+1 \geq 0$

$\therefore k \leq 5-2\sqrt{6}$ 또는 $k \geq 5+2\sqrt{6}$

두 근의 합 $k-3>0$이므로 $k>3$

두 근의 곱 $k+2>0$이므로 $k>-2$

따라서 $k \geq 5+2\sqrt{6}$