1. $(4 + 3x + 2x^2 + x^3)^2$ 을 전개하였을 때, 상수항을 제외한 각 항의 계수들의 총합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 84

해설

$x = 1$ 을 대입하면 (계수들의 총합) + (상수항)

$x = 1$ 일 때, $(4 + 3 + 2 + 1)^2 = 10^2 = 100$

전개한 식의 상수항은 $4^2 = 16$

따라서 상수항을 제외한 각 항의 계수들의 총합은 $100 - 16 = 84$

이다.

2. $(3 + 2x + x^2 + 3x^3)^2$ 을 전개하였을 때, x^9 의 계수를 제외한 각 항의 계수들의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$x = 1$ 을 대입하면

$(3 + 2 + 1 + 3)^2 = 9^2 = 81$ 이고

전개한 식의 x^9 의 계수는 $3^2 = 9$ 이다.

따라서 x^9 의 계수를 제외한 각 항의 계수들의 총합은 $81 - 9 = 72$ 이다.

3. $x^3 + 3x^2 + 3x + 5$ 를 $(x+2)$ 로 나누면 몫이 $f(x)$ 이고 나머지가 3 일 때, $f(x)$ 의 계수들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3 + 3x^2 + 3x + 5$ 를 $x + 2$ 로 나눈 몫을 $x^2 + ax + b$ 라 하고 식을 세우면

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 5 &= (x+2)(x^2 + ax + b) + 3 \\ &= x^3 + (a+2)x^2 + (2a+b)x + 2b + 3 \end{aligned}$$

계수를 비교해보면

$$a + 2 = 3, a = 1$$

$$2a + b = 3, b = 1$$

따라서 $f(x) = x^2 + x + 1$ 이므로 계수들의 합은 3 이다.

4. $a^2 = b^2 + c^2$ 일 때, $(a - b + c)(a + b - c)$ 를 간단히 하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $2bc$

해설

$$(a - b + c)(a + b - c) = \{a - (b - c)\} \{a + (b - c)\}$$

$b - c = X$ 로 치환하면

$$\therefore (a - X)(a + X) = a^2 - X^2 = (b^2 + c^2) - (b - c)^2 = 2bc$$

5. 자연수 x 를 7 로 나누면 4 가 남고, 자연수 y 를 7 로 나누면 5 가 남는다. xy 를 7 로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

x 를 7 로 나누었을 때의 몫을 a , y 를 7 로 나누었을 때의 몫을 b 라고 하면

$$x = 7a + 4, y = 7b + 5$$

$$\therefore xy = (7a + 4)(7b + 5)$$

$$= 49ab + 35a + 28b + 20$$

$$= 7(7ab + 5a + 4b + 2) + 6$$

따라서 xy 를 7 로 나눈 나머지는 6 이다.

6. $x+y+z=4$, $x^2+y^2+z^2=1$, $xyz=12$ 일 때, $x^3+y^3+z^3$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 \\ &= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \\ &= 4^2 - 2(xy+yz+zx) = 1 \\ \therefore xy+yz+zx &= \frac{15}{2} \\ \therefore x^3+y^3+z^3 &= (x+y+z)\{x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\} + 3xyz \\ &= 4\left(1 - \frac{15}{2}\right) + 36 = 10 \end{aligned}$$

7. $x + y + z = 3$, $xy + yz + zx = 1$, $\frac{xyz}{3xy + 3yz + 3zx} = 1$ 일 때,
(1-x)(1-y)(1-z)의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$$\frac{xyz}{3xy + 3yz + 3zx} = 1 \text{ 에서}$$

$$xyz = 3(xy + yz + zx) \quad \therefore xyz = 3$$

$$\therefore (1-x)(1-y)(1-z)$$

$$= 1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx) - xyz$$

$$= 1 - 3 + 1 - 3 = -4$$

8. $2006 \times 2008 - 4012 - 2005 \times 2007$ 를 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$2006 = t$ 라 하면

$$(\text{주어진 식}) = t(t+2) - 2t - (t-1)(t+1) = 1$$

9. $x = -3, y = 5$ 일 때, $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 900

해설

주어진 식을 간단히 하면

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2$$

$$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^4 + 2x^2y^2 - y^4$$

$$= 4x^2y^2 = 4(xy)^2$$

$xy = -15$ 이므로

$$\therefore (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2 = 4(xy)^2$$

$$= 4 \times (-15)^2$$

$$= 900$$

10. $(100^{20} - 5)^2$ 을 계산하였을 때, 각 자리 숫자의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 358

해설

$$\begin{aligned}(100^{20} - 5)^2 &= (10^{40} - 5)^2 \\ &= 10^{80} - 10^{41} + 25 \\ &= 999 \cdots 9000 \cdots 0 + 25 \\ &= 999 \cdots 9000 \cdots 025\end{aligned}$$

이때, 연속되는 9 가 39 개, 연속되는 0 이 39 개이고, 십의 자리와 일의 자리 숫자가 2 와 5 이므로 각 자리의 숫자의 합은 $9 \times 39 + 2 + 5 = 358$ 이다.

11. $xy = 3$, $|x - y| = 1$ 일 때, $(x + y)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$$(|x - y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy| \text{ 이므로}$$

$$1 = x^2 + y^2 - 6$$

$$x^2 + y^2 = 7$$

$$\therefore (x + y)^2 = 7 + 6 = 13$$

12. 넓이가 각각 4, 9 인 두 정사각형 A, B 의 한 변의 길이를 각각 a, b 라 할 때, $\frac{b}{a} - \frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{5}{6}$

해설

$$a^2 = 4$$

$$b^2 = 9$$

$$a^2 + b^2 = 13$$

$$a^2 b^2 = 36$$

$$\therefore ab = 6 \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$\therefore \frac{b}{a} - \frac{a}{b} = \frac{b^2 - a^2}{ab} = \frac{9 - 4}{6} = \frac{5}{6}$$

13. $\frac{1}{49}a^2 - \frac{2}{35}ab + \frac{1}{25}b^2$ 을 인수분해 하면?

- ① $\left(\frac{1}{7}a + \frac{1}{5}\right)^2$ ② $\left(\frac{1}{7}a - \frac{1}{5}\right)^2$ ③ $\left(\frac{1}{7}b - \frac{1}{5}a\right)^2$
④ $\left(\frac{1}{7}a - \frac{1}{5}b\right)^2$ ⑤ $\left(\frac{1}{7}a + \frac{1}{5}b\right)^2$

해설

$$\frac{1}{49}a^2 - \frac{2}{35}ab + \frac{1}{25}b^2 = \frac{1}{49}a^2 - \left(2 \times \frac{1}{7}a \times \frac{1}{5}b\right) + \frac{1}{25}b^2 = \left(\frac{1}{7}a - \frac{1}{5}b\right)^2$$

14. $3x^2 + ax + 12$ 와 $x^2 + 5x + b$ 완전제곱식이 될 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, $a > 0, b > 0$)

▶ 답:

▷ 정답: $a + b = \frac{73}{4}$

해설

$3x^2 + ax + 12$ 이 완전제곱식이 되려면

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 3 \times 12 \quad \therefore a = 12$$

$x^2 + 5x + b$ 이 완전제곱식이 되려면

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = b \quad \therefore b = \frac{25}{4}$$

$$\therefore a + b = 12 + \frac{25}{4} = \frac{48}{4} + \frac{25}{4} = \frac{73}{4}$$

15. $f(x) = 4x + 2$, $g(x) = 6x^2 - 5x - 4$ 에 대하여 $\frac{g(x)}{f(x)} = ax + b$ 로 나타내어질 때, $2ab$ 의 값을 구하면?

- ① -3 ② -6 ③ 3 ④ 6 ⑤ 12

해설

$$\begin{aligned} g(x) &= (ax + b)f(x) \text{ 이므로} \\ 6x^2 - 5x - 4 &= (3x - 4)(2x + 1) \\ &= \left(\frac{3}{2}x - 2\right)(4x + 2) \\ &= \left(\frac{3}{2}x - 2\right)f(x) \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}, b = -2$$

$$\therefore 2ab = -6$$

16. $x^4 + Ax^3 + x^2 + Bx + 1$ 이 $x^2 - 3x + 2$ 로 나누어떨어질 때, $A - B$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $A - B = -2$

해설

$$\begin{aligned} & x^4 + Ax^3 + x^2 + Bx + 1 \\ &= (x^2 - 3x + 2)(x^2 + ax + b) \\ &= x^4 + (a-3)x^3 + (b-3a)x^2 + (-3b+2a)x + 2b \\ & 2b = 1, \therefore b = \frac{1}{2} \\ & b - 3a + 2 = 1, \therefore a = \frac{1}{2} \\ & \therefore A = a - 3 = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2} \\ & \therefore B = -3b + 2a = (-3) \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ & \therefore A - B = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = -2 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} & f(x) = x^4 + Ax^3 + x^2 + Bx + 1 \text{ 이라 하면} \\ & f(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) \text{ 라 쓸 수 있다.} \\ & f(1) = 1 + A + 1 + B + 1 = 0 \\ & f(2) = 16 + 8A + 4 + 2B + 1 = 0 \\ & A = -\frac{5}{2}, B = -\frac{1}{2} \\ & \therefore A - B = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = -2 \end{aligned}$$

17. $(x+2)(x+a)-3$ 이 두 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, a 가 될 수 있는 값을 모두 구하여라. (단, 주어진 다항식은 정수 범위에서 인수분해 된다.)

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 0

▷ 정답: 4

해설

$$(x+2)(x+a)-3 = (x+\alpha)(x+\beta) \text{로 놓으면}$$

$$x^2 + (a+2)x + 2a - 3 = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$$a+2 = \alpha + \beta \text{에서 } a = \alpha + \beta - 2$$

$$2a - 3 = \alpha\beta \text{에서 } a = \frac{\alpha\beta + 3}{2}$$

$$\therefore \alpha + \beta - 2 = \frac{\alpha\beta + 3}{2}$$

$$\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 7 = 0$$

$$(\alpha - 2)(\beta - 2) = -3$$

$\alpha - 2 = \pm 1$ 일 때, $\beta - 2 = \mp 3$ 이므로

$$(\alpha, \beta) = (3, -1), (1, 5)$$

$$\therefore a = \alpha + \beta - 2 \text{ 에서 } a = 0, 4$$

18. 두 이차식 $x^2 - ax + b = AB$, $x^2 + ax - b = CD$ 가 각각 두 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, $x(A+B+C+D) - 4a^2$ 의 인수로 옳은 것은?

- ① $x - 2a$ ② $x - a$ ③ x
④ $x + a^2$ ⑤ $x^2 + a$

해설

$$\begin{aligned} \text{(i) } x^2 - ax + b &= AB \\ &= (x + \alpha)(x + \beta) \\ &= x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A + B &= (x + \alpha) + (x + \beta) \\ &= 2x + \alpha + \beta = 2x - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } x^2 + ax - b &= CD \\ &= (x + \gamma)(x + \delta) \\ &= x^2 + (\gamma + \delta)x + \gamma\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C + D &= (x + \gamma) + (x + \delta) \\ &= 2x + \gamma + \delta = 2x + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore x(A + B + C + D) - 4a^2 &= x(2x - a + 2x + a) - 4a^2 \\ &= 4x^2 - 4a^2 = 4(x + a)(x - a) \end{aligned}$$

19. $4x^2 - 4x - a$ 가 두 일차식의 곱으로 인수분해되고, 이 중 한 인수가 $2x + 3$ 일 때, a 의 값은?

- ① -15 ② -6 ③ 3 ④ 6 ⑤ 15

해설

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x - a &= (2x + 3)(bx + c) \\ &= 2bx^2 + (3b + 2c)x + 3c \end{aligned}$$

$$2b = 4, \quad b = 2$$

$$2c + 3b = -4, \quad c = -5$$

$$-a = 3c = -15, \quad a = 15$$

21. 다음 중 $(x^2 + 2x)^2 - 11(x^2 + 2x) + 24$ 의 인수가 아닌 것은?

- ① $x + 4$ ② $x + 3$ ③ $x + 2$ ④ $x - 1$ ⑤ $x - 2$

해설

$x^2 + 2x = A$ 로 치환하면
(준식) $= A^2 - 11A + 24 = (A - 3)(A - 8)$ 이다.
따라서
 $(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x - 8)$
 $= (x + 3)(x - 1)(x - 2)(x + 4)$

22. 다항식 $(x^2 - 4)(x^2 - 2x - 3) - 21$ 를 인수분해했을 때, 다음 중 인수인 것은?

- ① $x^2 - x + 1$ ② $x^2 + x - 1$ ③ $x^2 - 2x - 1$
④ $x^2 - x + 3$ ⑤ $x^2 - x + 9$

해설

$$\begin{aligned} & (x^2 - 4)(x^2 - 2x - 3) - 21 \\ &= (x + 2)(x - 2)(x - 3)(x + 1) - 21 \\ &= (x + 2)(x - 3)(x + 1)(x - 2) - 21 \\ &= (x^2 - x - 6)(x^2 - x - 2) - 21 \\ & x^2 - x = A \text{ 로 놓으면} \\ & (A - 6)(A - 2) - 21 = A^2 - 8A + 12 - 21 \\ & \quad = A^2 - 8A - 9 \\ & \quad = (A - 9)(A + 1) \\ & \quad = (x^2 - x - 9)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

23. $x^3 + y - x - x^2y$ 을 인수분해 하였을 때, 일차식인 인수들의 합은?

- ① $2x - y + 1$ ② $x - y - 2$ ③ $3x - y + 2$
④ $2x - y$ ⑤ $3x - y$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^3 - x + y - x^2y \\ &= x(x^2 - 1) - y(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)(x - y) \\ &= (x + 1)(x - 1)(x - y) \\ \therefore x + 1 + x - 1 + x - y &= 3x - y\end{aligned}$$

24. $a^4 + a^2b^2 + b^4$ 을 인수분해하면?

① $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

② $(a^2 + ab + b)(a^2 - ab + b)$

③ $(a^2 + ab + b)(a^2 - ab - b)$

④ $(a^2 + ab - b)(a^2 - ab + b)$

⑤ $(a + ab + b^2)(a - ab + b^2)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)\end{aligned}$$

25. 다항식 $x^4 - 3x^2 + 1$ 이 $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ 로 인수분해 될 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned}x^2 &= X \text{로 치환하면} \\x^4 - 3x^2 + 1 &= X^2 - 3X + 1 \\&= X^2 - 2X + 1 - X \\&= (X - 1)^2 - X \\&= (x^2 - 1)^2 - x^2 \\&= (x^2 - 1 - x)(x^2 - 1 + x) \\&= (x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1) \text{이므로} \\a &= -1, b = -1, c = 1, d = -1 \text{이거나} \\a &= 1, b = -1, c = -1, d = -1 \\&\therefore a + b + c + d = -2\end{aligned}$$

26. $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 일 때, $\frac{2b}{a} + \frac{c}{2b} + \frac{2a}{c}$ 의 값을 구하여라. (단, $a + b + c \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{2}$

해설

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0$$

이때 a, b, c 는 실수이고 $a+b+c \neq 0$ 이므로

$$\therefore a = b = c$$

$$\therefore \frac{2b}{a} + \frac{c}{2b} + \frac{2a}{c} = \frac{9}{2}$$

27. $f(a) = \frac{a^2 - 1}{a^2}$ 일 때, $f(10) \times f(11) \times f(12) \times \dots \times f(99)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{9}{10}$ ③ $\frac{10}{11}$ ④ $\frac{10}{99}$ ⑤ $\frac{20}{99}$

해설

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{a^2 - 1}{a^2} = \frac{a - 1}{a} \cdot \frac{a + 1}{a} \text{ 이므로} \\ f(10) \times f(11) \times f(12) \times \dots \times f(99) \\ &= \frac{9}{10} \cdot \frac{11}{10} \times \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{11} \times \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \times \dots \times \frac{98}{99} \cdot \frac{100}{99} \\ &= \frac{9}{10} \times \frac{100}{99} \\ &= \frac{10}{11} \end{aligned}$$

28. 양수 a, b 에 대하여, $a^2b + ab^2 = 12$, $a^3 + b^3 = 28$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$a^2b + ab^2 = ab(a + b) = 12$
 $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 28$
 $a + b = X$, $ab = Y$ 로 치환하면
 $XY = 12$, $X^3 - 3XY = 28$
 $\therefore X = 4$, $Y = 3$
따라서 $a^2 + b^2 = X^2 - 2Y = 16 - 6 = 10$ 이다.

29. $a^2 + a + 1 = 0$ 일 때, $a^{11} + \frac{1}{a^{11}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$a^2 + a + 1 = 0$ 의 양변을 a ($a \neq 0$) 로 나누면

$$a + 1 + \frac{1}{a} = 0$$

$$\therefore a + \frac{1}{a} = -1$$

$a^2 + a + 1 = 0$ 의 양변에 $a - 1$ 을 곱하면

$$(a - 1)(a^2 + a + 1) = 0$$

$$\therefore a^3 - 1 = 0, a^3 = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore a^{11} + \frac{1}{a^{11}} &= (a^3)^3 \cdot a^2 + \frac{1}{(a^3)^3 \cdot a^2} \\ &= a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \\ &= (-1)^2 - 2 = -1 \end{aligned}$$

30. $a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$, $b = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ 일 때,

$\sqrt{a^2 - ab + b^2 + 3}$ 의 값은?

- ① $5\sqrt{3}$ ② 10 ③ $10\sqrt{3}$ ④ $10\sqrt{6}$ ⑤ 15

해설

$$a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = 5 + 2\sqrt{6},$$

$$b = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$\therefore a - b = 4\sqrt{6}, \quad ab = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{a^2 - ab + b^2 + 3} &= \sqrt{(a-b)^2 + ab + 3} \\ &= \sqrt{96 + 1 + 3} = \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

31. 세 자연수 x, y, z 에 대하여 $x+y+z+xy+yz+zx=29-xyz$ 일 때, $x^2+y^2+z^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$x+y+z+xy+yz+zx=29-xyz$ 에서
 $xyz+x+y+z+xy+yz+zx=29$
 $xy(z+1)+y(z+1)+x(z+1)+z=29$
 $xy(z+1)+y(z+1)+x(z+1)+(z+1)=30$
 $(z+1)(xy+x+y+1)=30$
 $(x+1)(y+1)(z+1)=30$
이때, x, y, z 는 자연수이고 $30=2 \times 3 \times 5$ 이므로
 $(x, y, z) = (1, 2, 4)$
 $\therefore x^2+y^2+z^2=21$

32. $a-b=3ab$ 일 때, $\frac{3a^2b-3ab^2-7a^2b^2}{a^2-2ab+b^2}$ 의 값을 구하여라. (단, $ab \neq 0$, $a \neq b$)

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{2}{9}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{ab(3a-3b-7ab)}{(a-b)^2} \\ &= \frac{ab\{3(a-b)-7ab\}}{(a-b)^2} \\ &= \frac{ab(9ab-7ab)}{(3ab)^2} \\ &= \frac{2a^2b^2}{9a^2b^2} = \frac{2}{9}\end{aligned}$$

33. 밑면의 가로와 세로가 각각 $3x - 1$, $x - 2y$ 인 직육면체의 부피가 $3x^3 - 7x^2 - 6x^2y + 2x + 14xy - 4y$ 이다. 이때, 이 직육면체의 높이를 구하면?

- ① $x - 2$ ② $x - 1$ ③ $x + 1$
④ $x + 2$ ⑤ $2x + 1$

해설

y 에 관하여 내림차순으로 정리하면
(준식)
 $= -2y(3x^2 - 7x + 2) + 3x^3 - 7x^2 + 2x$
 $= -2y(3x^2 - 7x + 2) + x(3x^2 - 7x + 2)$
 $= (x - 2y)(3x^2 - 7x + 2)$
 $= (x - 2y)(3x - 1)(x - 2)$
따라서 높이는 $x - 2$ 이다.