1. 자연수 n에 대하여 $f(n) = \sqrt{(3n-1)(3n+1)+1}$이라고 할 때, $f(1)+f(2)+\cdots+f(10)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 165

해설

$f(1) = \sqrt{2\times 4+1} = 3 = 3\times 1$
$f(2) = \sqrt{5\times 7+1} = 6 = 3\times 2$
$f(3) = \sqrt{8\times 10+1} = 9 = 3\times 3$
$\vdots$
$f(10) = \sqrt{29\times 31+1} = 30 = 3\times 10$
$f(1)+f(2)+\cdots+f(10) = 3(1+2+3+\cdots+10)$
$= 3\times 55 = 165$

2. $xy < 0,\ \dfrac{y}{z} > 0$ 일 때, 다음 식을 간단히 하면?

$$|xy - yz| - \sqrt{(yz - xz)^2} + |xy| + \sqrt{(xz)^2}$$

① $2xy$ ② xy ③ $-xy$ ④ $-xz$ ⑤ $-2xy$

해설

$xy < 0$ 이므로 x 와 y 는 서로 다른 부호이고,
$\dfrac{y}{z} > 0$ 이므로 y 와 z 는 서로 같은 부호이다.
따라서 x 와 z 는 서로 다른 부호가 된다.
$xy < 0$ 이고 $yz > 0$ 이므로 $xy - yz < 0$
$yz > 0$ 이고 $xz < 0$ 이므로 $yz - xz > 0$
$\therefore |xy - yz| - \sqrt{(yz - xz)^2} + |xy| + \sqrt{(xz)^2}$
$= -xy + yz - yz + xz - xy - xz$
$= -2xy$

3. 1부터 9까지의 숫자가 적힌 카드가 한 장씩 있다. 이 카드 중에서 임의로 3장을 뽑을 때, $\sqrt{126abc}$ 가 자연수가 되는 경우는 모두 몇 가지인가?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\sqrt{126abc} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 7 \times abc}$

$abc = 14$ 또는 $abc = 56$ 또는 $abc = 126$

$abc = 224$ 또는 $abc = 504$

$abc = 14$ 일 때, $(1, 2, 7)$

$abc = 56$ 일 때, $(1,\ 7,\ 8)$, $(2,\ 4,\ 7)$

$abc = 126$ 일 때, $(2,\ 7,\ 9)$, $(3,\ 6,\ 7)$

$abc = 224$ 일 때, $(4,\ 7,\ 8)$

$abc = 504$ 일 때, $(7,\ 8,\ 9)$

4. $\sqrt{59+a}=b$라 할 때, b가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 a와 그 때의 b의 합 $a+b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

59 보다 큰 제곱수는 $64, 81, 100, \cdots$ 이므로
$59+a=64, 81, 100\cdots$
$\therefore a=5, 22, 41, \cdots$
따라서 가장 작은 자연수 $a=5$, $b=\sqrt{59+5}=8$이다.
$\therefore a+b=5+8=13$

5. 두 부등식 $\sqrt{5} < \sqrt{2x} < 2\sqrt{7}$, $3 \leq \sqrt{y-1} < 5\sqrt{2}$ 을 만족하는 정수 x, y 에 대해 $x+y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$\sqrt{5} < \sqrt{2x} < 2\sqrt{7}$ 이므로 $5 < 2x < 28$, 즉 $2.5 < x < 14$
$3 \leq \sqrt{y-1} < 5\sqrt{2}$ 이므로 $9 \leq y-1 < 50$, 즉 $10 \leq y < 51$
두 정수 x, y 는 양수이므로 $x+y$ 의 최솟값은 x 의 최솟값, y 의 최솟값의 합이다.
따라서 $x=3, y=10$ 일 때, $x+y$ 는 최솟값 13 을 갖는다.

6. 연립방정식 $\begin{cases} \sqrt{2}x+\sqrt{3}y=5\sqrt{6} \\ \sqrt{3}x-2\sqrt{2}y=-2 \end{cases}$ 를 풀면?

① $x=\frac{17}{7}\sqrt{3},\ y=\frac{18}{7}\sqrt{2}$　② $x=\frac{18}{7}\sqrt{2},\ y=\frac{17}{7}\sqrt{3}$

③ $x=\frac{17}{7}\sqrt{2},\ y=\frac{18}{7}\sqrt{3}$　④ $x=\frac{18}{7}\sqrt{3},\ y=\frac{17}{7}\sqrt{2}$

⑤ $x=\frac{17}{7}\sqrt{3},\ y=\frac{18}{7}\sqrt{3}$

해설

$\begin{cases} \sqrt{2}x+\sqrt{3}y=5\sqrt{6}\cdots㉠ \\ \sqrt{3}x-2\sqrt{2}y=-2\cdots㉡ \end{cases}$

㉠$\times 2\sqrt{2}+$㉡$\times\sqrt{3}$ 을 하면

$$\begin{array}{rr} 4x+2\sqrt{6}y=20\sqrt{3} \\ +)\ 3x-2\sqrt{6}y=-2\sqrt{3} \\ \hline 7x\qquad\quad =18\sqrt{3} \end{array}$$

$\therefore x=\frac{18}{7}\sqrt{3}$

㉡에 $x=\frac{18}{7}\sqrt{3}$ 을 대입하면

$\frac{54}{7}-2\sqrt{2}y=-2,\ \sqrt{2}y=\frac{34}{7}$

$y=\frac{17}{7}\sqrt{2}$

7. $\sqrt{\frac{2x}{k}}$ 의 정수 부분을 a 라고 할 때, $a=5$ 를 만족하는 x 의 개수가 11 개이다. 자연수 k 의 값을 구하여라. (단, $\frac{2x}{k}$ 는 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=2$

해설

$5 \le a < 6$ 이므로 $5 \le \sqrt{\frac{2x}{k}} < 6$

$25 \le \frac{2x}{k} < 36$

$\frac{25}{2}k \le x < \frac{36}{2}k$

이를 만족하는 x 의 개수가 11 개이므로,

$\frac{36}{2}k - \frac{25}{2}k = 11$

$(36-25)k = 22$

$\therefore\ k=2$

8. $\sqrt{x}$ 의 정수 부분을 $f(x)$ 라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

$$\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(4)}+\frac{1}{f(6)}+\cdots+\frac{1}{f(18)}+\frac{1}{f(20)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{17}{4}$

해설

$f(1)=1, f(4)=2, f(9)=3, f(16)=4$ 이므로
$f(2)=1$
$f(4),\ f(6),\ f(8)=2$
$f(10), f(12),\ f(14)=3$
$f(16), f(18), f(20)=4$

$$(\text{준식}) = \frac{1}{1}+3\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{4}$$
$$= 1+\frac{3}{2}+1+\frac{3}{4}=\frac{17}{4}$$

9. 넓이가 7π인 원을 지면에 수직으로 세워서 네 바퀴 돌렸을 때, 지면과 접하고 있던 원 위의 한 점 A가 다시 지면과 접하고 있었다. 이때 점 A는 원래의 위치에서 얼마나 떨어져 있는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $8\sqrt{7}\pi$

해설

넓이가 7π 이므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면
$\pi r^2 = 7\pi \therefore r = \sqrt{7}$
이때, 원을 네 바퀴 굴렸으므로
(원 위의 한 점 A가 원래의 위치로부터 떨어진 거리)
= (원의 둘레의 길이) $\times 4$
$= 2\pi \times \sqrt{7} \times 4$
$= 8\sqrt{7}\pi$

10. $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}+3=0$ 일 때, $xy+yz+zx$ 의 값을 구하여라.
(단, $x+y+z=0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}+3=0$ 에서

$\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}+1\right)+\left(\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{y}+1\right)+\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z}+1\right)=0$

$\dfrac{x+y+z}{x}+\dfrac{x+y+z}{y}+\dfrac{x+y+z}{z}=0$

$(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=0$

$x+y+z\neq 0$ 이므로 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$

$\dfrac{xy+yz+zx}{xyz}=0$

$\therefore\ xy+yz+zx=0$

11. $(a+b+c-d)(-a+b+c+d)+(a+b-c+d)(a-b+c+d)$ 를 전개하면?

① $2ad+2bc$　② $3ad+3bc$　③ $4ad+4bc$

④ $3ad-3bc$　⑤ $4ad-4bc$

해설

$(a+b+c-d)(-a+b+c+d)+(a+b-c+d)(a-b+c+d)$
$=\{(b+c)+(a-d)\}\{(b+c)-(a-d)\}+\{(a+d)+(b-c)\}\{(a+d)-(b-c)\}$
$=(b+c)^2-(a-d)^2+(a+d)^2-(b-c)^2$
$=b^2+2bc+c^2-a^2+2ad-d^2+a^2+2ad+d^2-b^2+2bc-c^2$
$=4ad+4bc$

12. $\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}=2$ 일 때, $\frac{y^3}{x^3}+\frac{x^3}{y^3}$ 의 값은?

① ±1 ② ±2 ③ ±3 ④ ±4 ⑤ ±5

해설

$\frac{y}{x}=A$, $\frac{x}{y}=\frac{1}{A}$ 이라 하면

$\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}=2$ 는 $A^2+\frac{1}{A^2}=2$,

$A^2+\frac{1}{A^2}=\left(A+\frac{1}{A}\right)^2-2=2$

$\therefore\ A+\frac{1}{A}=\pm2$

$\therefore\ \frac{y^3}{x^3}+\frac{x^3}{y^3}=A^3+\frac{1}{A^3}$

$=\left(A+\frac{1}{A}\right)^3-3\left(A+\frac{1}{A}\right)$

$=(\pm2)^3-3(\pm2)$

$=\pm2$

13. $\dfrac{(x+y)^2}{3} = (x-y)^2 = 2$ 일 때, $(x+2y)(2x+y)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$(x+y)^2 = 6$

$(x-y)^2 = 2$

$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$ 이므로

$\therefore\ xy = 1$

$\therefore\ (x+2y)(2x+y) = 2(x+y)^2 + xy = 12 + 1 = 13$

14. x에 관한 이차식 $x^2+11x+k$가 $(x+a)(x+b)$로 인수 분해될 때, 정수 k의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 18 ③ 22 ④ 27 ⑤ 30

해설

$a+b=11$이 되는 a, b중 곱 ab가 가장 큰 수는 $5\times 6=30$이다.

15. 인수분해를 이용하여 다음 식의 값을 구하면?

$$\sqrt{58^2 \times \frac{1}{16} - 42^2 \times \frac{1}{16}}$$

① 5 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

$$\sqrt{58^2 \times \frac{1}{16} - 42^2 \times \frac{1}{16}}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{16}(58-42)(58+42)}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{16} \times 16 \times 100} = 10$$

16. 두 실수 a, b가 $a^2+ab+b^2=7$, $a^2-ab+b^2=3$을 동시에 만족시킬 때, $(a+b)^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$$\begin{cases} a^2+ab+b^2=7 & \cdots① \\ a^2-ab+b^2=3 & \cdots② \end{cases}$$

$① + ②$: $a^2+b^2=5$

$① - ②$: $2ab=4$

$\therefore (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$=a^2+b^2+2ab$

$=5+4=9$

17. 부피가 $x^3 + x^2y - x - y$ 인 직육면체의 밑면의 가로와 세로의 길이가 각각 $x-1, x+1$ 일 때, 이 직육면체의 높이를 구하면?

① $x+y$　② $x-y^2$　③ x^2+y

④ $x+y^2$　⑤ $x-y$

해설

$x^3 + x^2y - x - y$
$= x^2(x+y) - (x+y)$
$= (x+y)(x+1)(x-1)$ 이다.
따라서 직육면체의 높이는 $x+y$ 이다.

18. 이차방정식 $x-\dfrac{3}{x}=6$ 의 두 근을 $p,\ q$ 라고 할 때 $(p^2-6p+5)(q^2-6q+3)$ 의 값을 구하면?

① 12 ② 24 ③ 36 ④ 48 ⑤ 50

해설

$x-\dfrac{3}{x}=6$ 의 양변에 x 를 곱하면 $x^2-6x-3=0$

$x=p$, $x=q$ 를 각각 대입하면

$p^2-6p-3=0$ 에서 $p^2-6p=3$

$q^2-6q-3=0$ 에서 $q^2-6q=3$

$\therefore\ (p^2-6p+5)(q^2-6q+3)=(3+5)(3+3)=48$

19. 방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ 을 만족하는 정수의 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수를 구하여라. (단 $x>y$)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 2개

해설

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2},\ \frac{x+y}{xy}=\frac{1}{2},\ xy=2(x+y)$

$xy-2(x+y)=0,\ xy-2(x+y)+4=4$

$xy-2x-2y+4=4,\ x(y-2)-2(y-2)=4$

$(x-2)(y-2)=4$ 그런데 $x,\ y$ 는 정수이므로

$x-2$	1	2	4	−1	−2	−4
$y-2$	4	2	1	−4	−2	−1

x	3	4	6	1	0	−2
y	6	4	3	−2	0	1

$x\neq 0,\ y\neq 0$ 이고 $x>y$ 이므로

구하는 $(x,\ y)$ 는 $(6,\ 3),\ (1,\ -2)$ 이다.

따라서 2개이다.

20. 다음 식의 값을 구하여라.

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

주어진 식을 x 라 하면

$x=2+\sqrt{x}$, $\sqrt{x}>0$ 이므로 $x>2$

$x-2=\sqrt{x}$ 의 양변을 제곱하면

$x^2-4x+4=x$

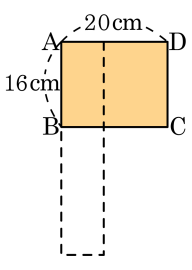
$x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=4$

$\therefore\ x>2$ 이므로 $x=4$

21. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 20cm , 16cm 인 직사각형에서 가로의 길이는 매초 2cm 씩 줄어들고, 세로의 길이는 매초 4cm 씩 늘어난다고 할 때, 넓이가 처음 직사각형의 넓이와 같아지는데 걸리는 시간은?



① 2 초 ② 4 초 ③ 6 초

④ 8 초 ⑤ 10 초

해설

구하는 시간을 x 초 라 하면
처음 넓이는 $20 \times 16 = 320$
x 초 후의 넓이는 $(20-2x)(16+4x)$ 이다.
따라서 $(20-2x)(16+4x) = 320$
$-8x^2 + 48x = 0 \rightarrow x(x-6) = 0$
$x > 0$ 이므로 $x = 6$

22. 밑변의 길이가 20cm , 높이가 16cm 인 삼각형에서 밑변의 길이는 매초 2cm 씩 늘어나고, 높이는 매초 1cm 씩 줄어든다고 할 때, 그 넓이가 처음 삼각형과 같아지는데 걸리는 시간은?

① 2 초　② 3 초　③ 4 초　④ 5 초　⑤ 6 초

해설

$\frac{1}{2}(20+2x)(16-x)=\frac{1}{2}\times 20\times 16$

$2(10+x)(16-x)=20\times 16$

$(10+x)(16-x)=10\times 16$

$x^2-6x=0$

$x(x-6)=0$

$x=0,\ 6$

$\therefore$ 6 초 후

23. 밑면의 반지름의 길이가 5cm 이고 높이가 $h$cm 인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 반지름의 길이를 조금 늘렸더니 원기둥의 부피가 처음보다 21% 증가했을 때, 늘린 반지름의 길이는?

① 0.1cm ② 0.2cm ③ 0.25cm

④ 0.5cm ⑤ 1cm

해설

반지름의 늘린 길이를 x cm 라 하면
원래 원기둥의 부피는 $5^2\pi h$ cm
나중 원기둥의 부피는 $(5+x)^2\pi h$ cm
부피가 21% 증가했으므로
$(5+x)^2\pi h = 1.21 \times 5^2\pi h$
$(5+x)^2 = (1.1 \times 5)^2$
$x > 0$ 이므로 $5 + x = 5.5$
$\therefore x = 0.5$(cm)

24. 밑면의 반지름의 길이가 7cm 이고 높이가 $h$cm 인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 반지름의 길이를 조금 줄였더니 원기둥의 부피가 처음보다 64% 감소했을 때, 줄인 반지름의 길이는?

① 2.5cm ② 2.6cm ③ 2.7cm

④ 2.8cm ⑤ 2.9cm

해설

반지름의 줄인 길이를 $x$cm 라 하면
원래 원기둥의 부피는 $7^2\pi h$ cm
나중 원기둥의 부피는 $(7-x)^2\pi h$ cm
부피가 64% 감소했으므로
$(7-x)^2\pi h = 0.36 \times 7^2\pi h$
$(7-x)^2 = (0.6 \times 7)^2$
$x > 0$ 이므로 $7 - x = 4.2$
$\therefore x = 2.8$(cm)

25. 어떤 원의 반지름의 길이를 3 cm 만큼 줄였더니, 그 넓이는 처음 원의 넓이의 $\frac{1}{4}$ 배가 되었다. 이때, 처음 원의 반지름의 길이를 구하면?

① 3 cm ② 4 cm ③ 5 cm ④ 6 cm ⑤ 7 cm

해설

처음 원의 반지름 : r
줄인 원의 반지름 : $r-3$

$\pi(r-3)^2 = \frac{1}{4}\pi r^2$
$r^2 - 6r + 9 = \frac{1}{4}r^2$
$\frac{3}{4}r^2 - 6r + 9 = 0$
$r^2 - 8r + 12 = 0$
$(r-2)(r-6) = 0$
$\therefore\ r = 6\,\text{cm}$ ($r > 3$ 이므로)

26. 동서 방향으로 길이가 500 m , 남북방향으로 길이가 200 m 인 직사각형 모양의 땅에 동서 방향으로 x 개, 남북방향으로 $2x$ 개의 길을 내려고 한다. 도로의 넓이가 전체 땅의 넓이의 8.8 % 가 되도록 할 때, x 의 값으로 알맞은 것은? (단 도로의 폭은 1 m 로 일정하다.)

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

해설

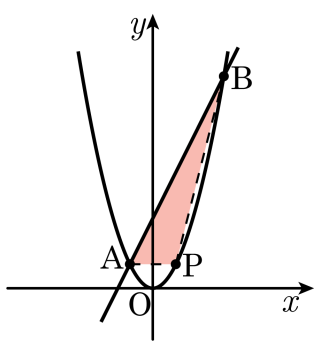
동서방향으로 난 도로의 넓이는 $500 \times x = 500x(\mathrm{m}^2)$,
남북방향으로 난 도로의 넓이는 $200 \times 2x = 400x(\mathrm{m}^2)$ 이고,
동서 방향과 남북 방향으로 난 도로가 겹치는 부분의 넓이는 $x \times 2x = 2x^2$ 이므로

도로의 넓이는 $500x+400x-2x^2 = 500\times200\times\frac{8.8}{100}, 900x-2x^2 = 8800$,

$x^2 - 450x + 4400 = 0,\ (x-440)(x-10)=0$

$\therefore\ x = 10\ (\because 0 < x < 200)$

27. 포물선 $y = x^2$ 과 직선 $y = 2x + 3$ 의 교점을 A, B 라하고, 원점을 O 라 한다. 점 P 가 원점을 출발하여 포물선을 따라 B 까지 움직일 때, $\triangle APB$ 의 넓이와 $\triangle OAB$ 의 넓이가 같게 되는 점 P 의 좌표는?



① $(1, 1)$ ② $(1, 2)$ ③ $(2, 1)$ ④ $(2, 4)$ ⑤ $(3, 2)$

해설

$\triangle APB$ 와 $\triangle AOB$ 의 넓이가 같으면 직선 AB 와 직선 OP 는 평행하므로
직선 OP 의 기울기는 2 이고 직선 OP 는 $y = 2x$ 이다. 점 P 는 $y = x^2$ 과 $y = 2x$ 의 교점이므로
$x^2 = 2x$, $x^2 - 2x = 0$, $x(x - 2) = 0$
$\therefore x = 2,\ y = 4$ 또는 $x = 0,\ y = 0$ (원점)
그런데 P 는 원점이 아니므로 P$(2,\ 4)$ 이다.

28. $y = 2(x-3)^2 - 5$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 , y축의 방향으로 5 만큼 평행이동 한 이차함수의 그래프 위에 두 점 A(2, 8), B(a, b) 의 y 축에 대하여 대칭인 점을 각각 C , D 라 하고, 원점을 O 라 한다. △ABC 와 △BOD 의 넓이의 비가 $2 : a^2$ 일 때, a 의 값을 구하면? (단, $0 < a < 2$)

① $a = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$ ② $a = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

③ $a = \dfrac{-1+\sqrt{10}}{2}$ ④ $a = \dfrac{-1-\sqrt{10}}{2}$

⑤ $a = \dfrac{2}{3}$

해설

$y = 2(x-3)^2 - 5$ 의 그래프를 평행이동하면 $y = 2x^2$ 이다. 점 A$(2, 8)$ 의 y 축에 대하여 대칭인 점 C 의 좌표는 $(-2, 8)$ 이고, 점 B(a, b) 의 y 축에 대하여 대칭인 점 D 의 좌표는 $(-a, b)$ 이다. 이 때, △ABC 의 $\overline{AC}$ 를 밑변, 점 A, B 의 y 좌표의 차를 높이로 하면 $\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times 4 \times (8-b)$

이 식에 $b = 2a^2$ 을 대입하면 ($\because$ $(a,\ b)$ 는 $y = 2x^2$ 위의 점)

$\dfrac{1}{2} \times 4 \times (8-2a^2) = 4(4-a^2)$

또한, $\triangle BOD = \dfrac{1}{2} \times 2a \times 2a^2 = 2a^3$

△ABC 와 △BOD 의 넓이의 비가 $2 : a^2$ 이므로 $4(4-a^2) : 2a^3 = 2 : a^2$

$\therefore a^2(4-a^2) = a^3, a^2 + a - 4 = 0$ 에서 $a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

여기서 $0 < a < 2$ 이므로 $a = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

29. 이차함수 $y=(x-5)^2$, $y=(x+3)^2$ 의 그래프의 교점에서 x 축으로 평행한 선분을 그었을 때, 두 그래프와 만나는 교점을 각각 A, B 라 하자. 두 개의 이차함수의 꼭짓점의 좌표를 P, Q 라 할 때, $\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

두 이차함수의 그래프의 교점에서 x 축으로 평행한 선분을 그었을 때, 두 그래프와 만나는 교점 사이의 거리는 두 그래프의 꼭짓점 사이의 거리의 2 배와 같다.

$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}=2$

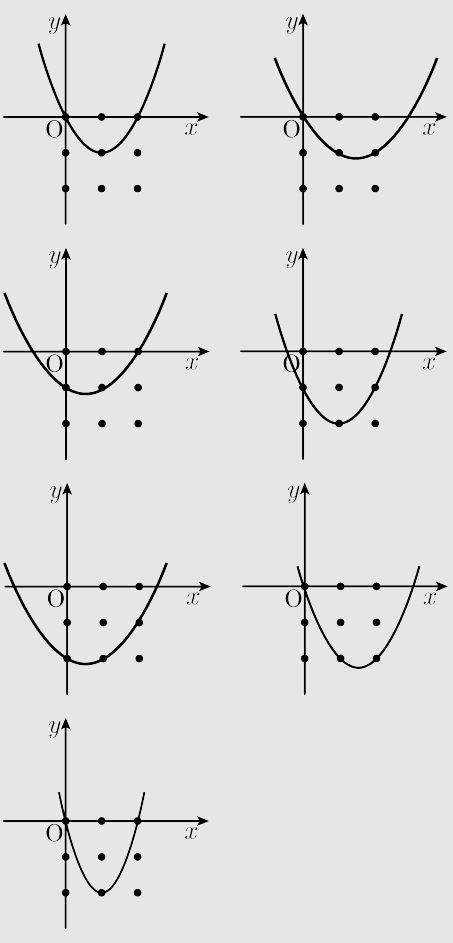
30. 좌표평면 위의 $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \le y \le \frac{1}{2}$의 영역에서 x, y 좌표가 모두 정수인 점 중 3개를 지나는 서로 다른 이차함수의 그래프는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 14개

해설

주어진 범위에서 x 좌표가 될 수 있는 정수는 0, 1, 2이고
y 좌표가 될 수 있는 정수는 -2, -1, 0이다.
포물선이 아래로 볼록한 경우에 아래 그림과 같이 모두 7개를 그릴 수 있다.



포물선이 위로 볼록한 경우도 마찬가지로 7개의 포물선을 그릴 수 있다.
따라서 구하는 포물선의 개수는 14개이다.

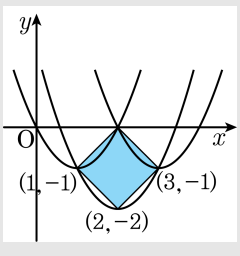
31. 세 이차함수 $y = x^2 - 2x$, $y = x^2 - 6x + 8$, $y = x^2 - 4x + 2$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$y = x^2 - 2x$ ⋯㉠
$y = x^2 - 6x + 8$ ⋯㉡
$y = x^2 - 4x + 2$ ⋯㉢
그래프 ㉢은 그래프 ㉠과 그래프 ㉡의 꼭짓점을 지나고 세 이차함수의 그래프는 모양과 폭이 같으므로 세 이차함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는
$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$이다.

32. 다음 보기 중 이차함수에 대한 설명이 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y = ax^2 + b(a \neq 0)$는 $x = b$ 를 축으로 하고 점 $(0,\ a)$ 를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

㉡ $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 에서 $|a|$ 의 값이 같으면 폭도 같다.

㉢ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때, a 가 커지면 폭이 좁아진다.

㉣ $y = -x^2$ 에서 $x < 0$ 일 때, x 값이 증가하면 y 값도 증가한다.

㉤ $y = ax^2$ 과 $y = -ax^2$ 의 그래프는 x 축에 대하여 대칭이다.

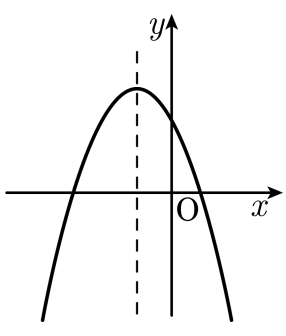
① ㉠,㉡,㉠ ② ㉠,㉡,㉣ ③ ㉠,㉡,㉤

④ ㉡,㉢,㉣ ⑤ ㉡,㉣,㉤

해설

㉠ $y = ax^2 + b(a \neq 0)$ 은 $x = 0$을 축으로 하고 점 $(0,\ b)$ 를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.
㉢ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때, a 가 커지면 폭이 넓어진다.
따라서 옳은 것은 ㉡,㉣,㉤이다.

33. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $y = cx^2 + ax + b$ 의 그래프의 꼭짓점은 제 몇 사분면에 있는가?



① 제1 사분면 ② 제2 사분면 ③ 제3 사분면
④ 제4 사분면 ⑤ 답이 없다.

해설

$a < 0,\ c > 0,\ -\dfrac{b}{2a} < 0$ 에서 $b < 0 \therefore\ a < 0,\ b < 0,\ c > 0$

$y = cx^2 + ax + b$ 에서

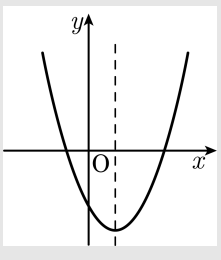
(1)$c > 0$ 이므로 아래로 볼록

(2) 꼭짓점의 x 좌표를 구하면

$$y = c\left(x^2 + \frac{a}{c}x + \frac{a^2}{4c^2} - \frac{a^2}{4c^2}\right) + b$$

$$= c\left(x + \frac{a}{2c}\right)^2 - \frac{a^2}{4c} + b$$이므로

축 : $-\dfrac{a}{2c} > 0$

(3)y 절편 : $b < 0$

따라서, 그래프는 다음 그림과 같으므로 꼭짓점은 제4사분면에 있다.