

1. 직선 $x+2y-3=0$ 을 평행이동 $f: (x, y) \rightarrow (x-2, y+1)$ 에 의하여 이동한 직선과 평행이동 $g: (x, y) \rightarrow (x+a, y-b)$ 에 의하여 이동한 직선이 일치할 때, a, b 에 대한 관계식을 구하면?

① $a = -2b$

② $a = -b$

③ $a = b$

④ $a = 2b$

⑤ $a = 3b$

해설

평행이동 $f: (x, y) \rightarrow (x-2, y+1)$ 은
 x 축의 방향으로 -2 만큼,
 y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하는 것이므로
직선 $x+2y-3=0$ 을
평행이동 f 에 의하여 이동하면
 $(x+2)+2(y-1)-3=0$
 $\therefore x+2y-3=0 \dots\dots\textcircled{\text{㉠}}$
또한, 평행이동 $g: (x, y) \rightarrow (x+a, y-b)$ 는
 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $-b$ 만큼
평행이동하는 것이므로
직선 $x+2y-3=0$ 을 평행이동 g 에 의하여 이동하면
 $(x-a)+2(y+b)-3=0$
 $\therefore x+2y-a+2b-3=0 \dots\dots\textcircled{\text{㉡}}$
이때, $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 이 일치해야 하므로
 $-a+2b-3=-3 \quad \therefore a=2b$

2. 직선 $2x + ay + b = 0$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하였더니 직선 $3x + 2y - 6 = 0$ 과 x 축 위의 점에서 직교하였다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

- ① -16 ② -13 ③ -11 ④ -9 ⑤ -7

해설

직선 $2x + ay + b = 0$ 을
 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하면,
 $2(x + 3) + a(y - 1) + b = 0$
 $2x + ay - a + b + 6 = 0 \cdots \textcircled{1}$
즉, 직선 $\textcircled{1}$ 의 기울기는 $-\frac{2}{a}$ 이고,
 x 절편은 $\frac{a - b - 6}{2}$ 이다.
이 때, 직선 $\textcircled{1}$ 이 직선 $3x + 2y - 6 = 0$,
즉 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ 과 x 절편이 같고
서로 직교하므로
(i) $\frac{a - b - 6}{2} = 2$
 $\therefore a - b = 10$
(ii) $-\frac{2}{a} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1 \quad \therefore a = -3$
따라서 (i), (ii)에서 $a = -3$, $b = -13$ 이므로
 $a + b = -3 + (-13) = -16$

3. 두 점 A(3,4), B(2,5) 가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ -1 ④ 3 ⑤ 0

해설

중점이 $y = ax + b$ 위의 점이므로,

$$\frac{9}{2} = a \cdot \frac{5}{2} + b \rightarrow 5a + 2b = 9$$

선분AB 와 $y = ax + b$ 는 서로 수직이므로,

$$\text{선분AB 의 기울기} : \frac{4-5}{3-2} = -1$$

따라서, $a = 1$

$$5 \cdot 1 + 2b = 9$$

$$\therefore 2b = 4 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore a + b = 1 + 2 = 3$$

4. 다음에서 집합인 것은 모두 몇 개인가?

- ㉠ 귀여운 새들의 모임

㉡ 우리나라 중학생의 모임

㉢ 작은 수의 모임

㉣ 삼각형의 모임

㉤ 우리 반에서 수학을 잘 하는 학생의 모임

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

집합이란 특정한 조건에 맞는 원소들의 모임이다. 따라서 집합인 것은 우리나라 중학생의 모임과 삼각형의 모임이다. 따라서 2 개이다.

5. 8의 약수의 집합을 A , 12의 약수의 집합을 B 라고 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $1 \in A, 1 \in B$ ② $2 \in A, 2 \in B$ ③ $4 \in A, 4 \notin B$
④ $4 \in A, 6 \in B$ ⑤ $7 \notin A, 11 \notin B$

해설

$A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 $4 \in A$, $4 \in B$ 이다.

6. 집합 $\{a, b\}$ 의 부분집합을 모두 구하면?

① $\emptyset$

② $\emptyset, \{a, b\}$

③ $\emptyset, \{a\}, \{a, b\}$

④ $\emptyset, \{b\}, \{a, b\}$

⑤ $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$

해설

원소의 개수가 0 개인 것 : $\emptyset$

원소의 개수가 1 개인 것 : $\{a\}, \{b\}$

원소의 개수가 2 개인 것 : $\{a, b\}$

7. 두 집합 $A = \{3, 6, 9, a + 1\}$, $B = \{b - 2, 6, 9, 12\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이므로

$$a + 1 = 12, a = 11$$

$$b - 2 = 3, b = 5$$

$$\therefore a + b = 11 + 5 = 16$$

8. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때, $X \subset A$, $A - X = \{1, 4\}$ 를 만족하는 집합 X 의 진부분집합의 개수는 몇 개인가?

① 6 개 ② 7 개 ③ 8 개 ④ 9 개 ⑤ 10 개

해설

$A - X = \{1, 4\}$ 이므로 $X = \{2, 3, 5\}$
 $\therefore 2^3 - 1 = 7(\text{개})$

9. 임의의 집합 A, B, C 에 대하여, 다음 중에서 $A - (B - C)$ 와 같은 집합은 ?

① $(A \cup B) - (A \cup C)$

② $(A - B) - (A - C)$

③ $(A \cap B) \cup (A - C)$

④ $(A - B) \cup (A \cap C)$

⑤ $(A \cup B) - (A \cap C)$

해설

$$\begin{aligned} A - (B - C) &= A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C) \\ &= (A - B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

10. 다음 <보기>의 명제 중 참인 것의 개수는?

보기

- ㉠ $x^2 < 1$ 이면 $x < 1$ 이다.
- ㉡ $x \neq 1$ 이면 $x^2 \neq 1$ 이다.
- ㉢ a, b 가 무리수일 때, $a + b, ab$ 중 적어도 하나는 무리수이다.
- ㉣ ab 가 유리수이면 $a + b$ 도 유리수이다.

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

㉠ $x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ $P = \{x \mid -1 < x < 1\}$, $Q = \{x \mid x < 1\}$
라 할 때, $P \subset Q$ 이므로 참
㉡ 반례 : $x = -1$ 일 때, 거짓
㉢ 반례 : $a = \sqrt{2}$ $b = -\sqrt{2}$ 일 때, $a + b = 0, ab = -2$ 이므로 거짓
㉣ 반례 : $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}, b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 일 때, $ab = 1$ (유리수), $a + b = 2\sqrt{3}$ (무리수) 이므로 거짓

11. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 다음 중 ‘ $\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.’가 거짓임을 보이는 원소가 속하는 집합은?

① $P \cap Q^c$

② $P \cup Q^c$

③ $P \cap Q$

④ $P^c \cap Q$

⑤ $P^c \cap Q^c$

해설

‘ $\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.’가 거짓이므로 대우명제 ‘ q 이면 p 이다.’도 거짓이다. 즉 $Q \subset P$ 가 거짓이므로 $Q - P \neq \emptyset$ 임을 보이면 된다. 따라서 $Q \cap P^c$ 에 속하는 원소이다.

12. 명제 ‘ $-1 < x < 2$ 이면 $a-2 < x < a+2$ 이다.’가 참일 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $0 < a < 1$

② $0 \leq a \leq 1$

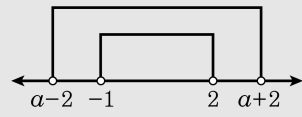
③ $a < 0$

④ $a \geq 1$

⑤ $a < 0$ 또는 $a > 1$

해설

명제 ‘ $-1 < x < 2$ 이면 $a-2 < x < a+2$ 이다.’가 참이 되려면 $\{x \mid -1 < x < 2\} \subset \{x \mid a-2 < x < a+2\}$ 이어야 하므로 다음 그림에서 $a-2 \leq -1, a+2 \geq 2$



$\therefore 0 \leq a \leq 1$

13. $a \leq x \leq 6$ 은 $2 \leq x \leq 5$ 이기 위한 필요조건이고, $b \leq x \leq 4$ 은 $2 \leq x \leq 5$ 이기 위한 충분조건일 때 a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\{x|2 \leq x \leq 5\} \subset \{x|a \leq x \leq 6\}$
 $\therefore a \leq 2$
 $\{x|b \leq x \leq 4\} \subset \{x|2 \leq x \leq 5\}$
 $\therefore 2 \leq b$
 a 의 최댓값은 2, b 의 최솟값은 2
 $\therefore 2 + 2 = 4$

14. 두 함수 $f(x) = 4x^2 + 1$, $g(x) = 2x + 2$ 에 대하여 $h \circ g = f$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = x^2 - 2x + 3$

② $h(x) = x^2 - 2x + 5$

③ $h(x) = x^2 - 4x + 5$

④ $h(x) = x^2 - 4x + 3$

⑤ $h(x) = x^2 - 4x + 2$

해설

$$h \circ g = f \Rightarrow h = f \circ g^{-1}$$

먼저 $g^{-1}(x)$ 를 구해보면

$$y = 2x + 2$$

$$\Rightarrow x = 2y + 2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1 \cdots g^{-1}(x)$$

$$\therefore h(x) = (f \circ g^{-1})(x)$$

$$= f(g^{-1}(x))$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 + 1$$

$$= x^2 - 4x + 5$$

$$\text{따라서 } h(x) = x^2 - 4x + 5$$

15. 함수 $f(x) = x + 1$ 라 할 때, $f^{10}(2)$ 의 값을 구하여라. (단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x+1) \\&= (x+1) + 1 = x+2 \\f^3(x) &= (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = f^2(x+1) \\&= (x+1) + 2 = x+3 \\f^4(x) &= (f^3 \circ f)(x) = f^3(f(x)) = f^3(x+1) \\&= (x+1) + 3 = x+4 \\&\quad \dots\end{aligned}$$

$$f^n(x) = x + n$$

$$\therefore f^{10}(2) = 2 + 10 = 12$$

16. $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 적어도 한 개의 홀수를 원소로 가지는 것의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 27 개

▷ 정답 : 27개

해설

공집합과 짝수만을 원소로 가지는 부분집합은 제외한다... $2^5 - 2^2 - 1 = 27(\text{개})$

17. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 다음을 만족할 때, $n(A) - n(B)$ 의 값을 구하여라.

보기

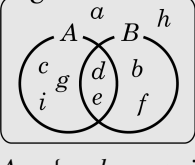
$$\begin{aligned} A \cup B &= \{b, c, d, e, f, g, i\} \\ A^c \cap B &= \{b, f\} \\ A^c \cup B^c &= \{a, b, c, f, g, h, i\} \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



$$A = \{c, d, e, g, i\}, B = \{b, d, e, f\}$$

$$\therefore n(A) - n(B) = 5 - 4 = 1$$

18. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 50, n(A) = 30, n(B) = 28, n(A^c \cap B^c) = 8$ 일 때, $n(A - B) + n(B - A)$ 의 값은?

① 22

② 24

③ 26

④ 28

⑤ 30

해설

$$n(A^c \cap B^c) = n(A \cup B)^c$$

$$= n(U) - n(A \cup B) = 8$$

$$\therefore n(A \cup B) = 42$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 30 + 28 - 42 = 16$$

$$n(A - B) + n(B - A) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$$

$$= 42 - 16 = 26$$

19. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 ‘ $n(A) = k$ 이면 $n(A \cap B) = k - 2$ (단, $k \geq 2$) ’를 만족하는 $n(B)$ 의 최솟값을 $f(k)$, 최댓값을 $g(k)$ 라 할 때, $f(2) + f(3) + g(4)$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) \\ &= k - (k - 2) = 2 \end{aligned}$$

따라서 $k - 2 \leq n(B) \leq 3$ 이므로

$$f(k) = k - 2, \quad g(k) = 3$$

$$\therefore f(2) + f(3) + g(4) = 0 + 1 + 3 = 4$$

20. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에서 집합 $B = \{3, 4, 5, 6\}$ 로의 함수 f 가 일대일 함수이다. f 중에서 임의의 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 인 것의 개수는?

- ① 14 개 ② 18 개 ③ 20 개 ④ 24 개 ⑤ 27 개

해설

일대일 대응 함수는

$f(1)$: 4 가지

$f(2)$: 3 가지

$f(3)$: 2 가지

$\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$ (가지)

그런데 $f(3) = 3$ 인 것이 6 가지 이므로

$f(x) \neq x$ 인 것은

$\therefore 24 - 6 = 18$ (가지)

21. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = x + 1$

㉡ $f(x) = -x$

㉢ $f(x) = -x + 1$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

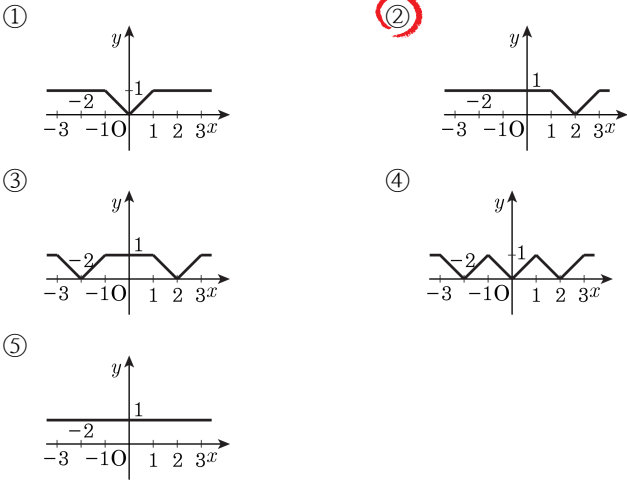
㉠. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(x+1))$
 $= f((x+1)+1) = f(x+2)$
 $= (x+2)+1 = x+3$
 $\therefore (f \circ f \circ f)(x) \neq f(x)$

㉡. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x))$
 $= f(-(-x)) = f(x)$

㉢. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x+1))$
 $= f(-(-x+1)+1) = f(x)$

따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

22. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 가 각각 $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$, $g(x) = x - 2$ 일 때, 합성함수 $f \circ g$ 의 그래프는 ?



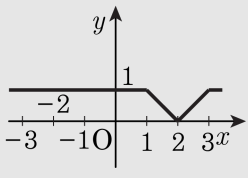
해설

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$$

$$g(x) = x - 2 \text{ 에서}$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & (|x - 2| \geq 1) \\ |x - 2| & (|x - 2| < 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ |x - 2| & (1 < x < 3) \end{cases}$$



23. 두 함수 $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = -x + 2$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(1)$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ $-\frac{4}{3}$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$$g^{-1}(x) = -x + 2$$

$$\begin{aligned} g^{-1}(f(x)) &= g^{-1}(3x - 1) = -(3x - 1) + 2 \\ &= -3x + 3 \end{aligned}$$

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(1) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(1) \\ &= (g^{-1} \circ f)(1) \\ &= g^{-1}(f(1)) = 0 \end{aligned}$$

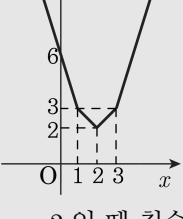
24. 함수 $y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ 의 최솟값을 m , 그 때의 x 의 값을 n 이라 할 때, 상수 m, n 의 곱 mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ 에서
(i) $x \geq 3$ 일 때, $y = x - 1 + x - 2 + x - 3 = 3x - 6$
(ii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $y = x - 1 + x - 2 - (x - 3) = x$
(iii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $y = x - 1 - (x - 2) - (x - 3) = -x + 4$
(iv) $x < 1$ 일 때, $y = -(x - 1) - (x - 2) - (x - 3) = -3x + 6$
따라서 $y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ 의 그래프는 다음 그림과 같고



$x = 2$ 일 때 최솟값이 2이므로 $m = 2, n = 2$
 $\therefore mn = 4$

25. 다음의 I, II에서 p 가 q 이기 위한 충분조건이면 1, 필요조건이면 3, 필요충분조건이면 7, 아무 조건도 아니면 0의 값을 주기로 하자.

I. $p : ab < 0$
 q : 두 부등식 $a > b, \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 이 동시에 성립한다.

II. $p : a + b - 1 < 0$
 q : 이차방정식 $x^2 - ax - b = 0$ 이 허근을 갖는다.

a, b 가 실수일 때, I, II에 주어지는 두 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :
▷ 정답 : 6

해설

I. q 의 두 부등식이 동시에 성립하기 위해서는
 $a - b > 0$ 이고 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$
 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab} > 0$ 에서 $ab < 0$ 이고
 $a > b$ 이므로
 $a > 0, b < 0$
역으로, $a > 0, b < 0$ 이면 $a > b$ 이고
 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
즉, 두 부등식이 동시에 성립하기 위한 필요충분조건은 $a > 0, b < 0$ 이다.
그런데 $ab < 0 \Leftrightarrow (a < 0, b > 0)$ 또는 $(a > 0, b < 0)$ 이므로
 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
II. 이차방정식 $x^2 - ax - b = 0$ 이 허근을 갖기 위한 필요충분조건은
 $D = a^2 + 4b < 0, P = \{(a, b) | a + b - 1 < 0\}$
 $Q = \{(a, b) | a^2 + 4b < 0\}$ 라 놓고 두 집합을 좌표평면에 나타내면
다음 그림과 같다. 즉, $Q \subset P$
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
따라서, 구하는 두 값의 합은 6이다.