

1. 세 다항식 $A = 2x^2y - xy^2 + y^3$, $B = -2xy^2 + 2y^3$, $C = x^3 + y^3$ 에 대하여 $(2A - B) + C$ 를 계산하면?

① $2x^3 - 4x^2y + 3y^3$

② $-x^3 + 2x^2y - y^3$

③ $2x^3 + 4x^2y - y^2$

④ $x^3 + 4x^2y + y^3$

⑤ $x^3 + 4y^3$

해설

$$\begin{aligned}(2A - B) + C \\&= 4x^2y - 2xy^2 + 2y^3 - (-2xy^2 + 2y^3) + x^3 + y^3 \\&= x^3 + 4x^2y + y^3\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}(2A - B) + C \\&= x^3 + 4x^2y + y^3\end{aligned}$$

2. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$ 일 때, $2A + B$ 를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\ &= (2a + 4b) + (2a + 3b) \quad \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a + (4b + 2a) + 3b \quad \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a + (2a + 4b) + 3b \quad \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a + 2a) + (4b + 3b) \quad \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2 + 2)a + (4 + 3)b \quad \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a + 7b \end{aligned}$$

▶ 답:

▶ 정답: ㉡

해설

$$\text{㉡ } 2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b): \text{결합법칙}$$

3. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + a$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

① -3

② 3

③ -6

④ 6

⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.

$$\therefore a - 3 = 0, a = 3$$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 이 되는 x 값을 대입한다.

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{에서 } (x-1)(x^2 + x + 1) = 0, x^3 - 1 = 0$$

$$\therefore x^3 = 1$$

준 식의 좌변에 $x^3 = 1, x^2 = -x - 1$ 을 대입하면

$$2x - 1 + 2(-x - 1) + a = 0, a - 3 = 0$$

$$\therefore a = 3$$

4. 다항식 $2x^2 + 5ax - a^2$ 을 다항식 $P(x)$ 로 나눈 몫이 $x + 3a$, 나머지가 $2a^2$ 일 때, 다항식 $(x + a)P(x)$ 를 나타낸 것은?

① $x^2 + 2ax - 2a^2$

② $x^2 - a^2$

③ $2x^2 + 3ax + a^2$

④ $2x^2 - 3ax - a^2$

⑤ $2x^2 + ax - a^2$

해설

$2x^2 + 5ax - a^2 = P(x)(x + 3a) + 2a^2$ 이므로

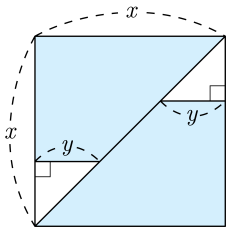
$$P(x)(x + 3a) = 2x^2 + 5ax - 3a^2$$

따라서, 다항식 $P(x)$ 는 $2x^2 + 5ax - 3a^2$ 을 $x + 3a$ 로 나눈 몫이므로

$$P(x) = 2x - a$$

$$\begin{aligned}\therefore (x + a)P(x) &= (x + a)(2x - a) \\ &= 2x^2 + ax - a^2\end{aligned}$$

5. 다음 그림은 한변의 길이가 x 인 정사각형을 대각선을 따라 자른 후 직각이등변삼각형 2개를 떼어낸 도형이다. 이때, 색칠한 부분의 넓이를 x, y 에 관한 식으로 나타내어라.



① $xy - y^2$

② $x^2 - y^2$

③ $x^2 - y$

④ $\frac{xy - y^2}{2}$

⑤ $\frac{x - y}{2}$

해설

$$x^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times y \times y = x^2 - y^2$$

6. $(a + b - c)(a - b + c)$ 를 전개하면?

① $a^2 + b^2 - c^2 - 2bc$

② $a^2 - b^2 + c^2 - 2bc$

③ $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$

④ $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$

⑤ $a^2 - b^2 - c^2 - 2ab$

해설

$$\begin{aligned}(a + b - c)(a - b + c) &= \{a + (b - c)\}\{a - (b - c)\} \\ &= a^2 - (b - c)^2 \\ &= a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\end{aligned}$$

7. 다항식 $(5x^2 + 3x + 1)^2$ 을 전개하였을 때, x^2 의 계수는?

① 10

② 13

③ 16

④ 19

⑤ 25

해설

$(5x^2 + 3x + 1)(5x^2 + 3x + 1)$ 에서

i) (일차항)×(일차항)의 경우 $9x^2$

ii) (이차항)×(상수항)의 경우 $2 \times 5x^2$

즉, $5x^2 + 5x^2 + 9x^2 = 19x^2$

∴ 19

8. $ax^2 - (2a + c)x - 1 = (b - 2)x^2 - c$ 가 x 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① -1

② 2

③ 4

④ 6

⑤ 8

해설

양변의 계수를 비교하면

$$a = b - 2 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2a + c = 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$1 = c \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}, c = 1$$

$$\therefore a + b + c = 2$$

9. 등식 $x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$ 이 x 에 관한 항등식일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$$

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 2 = a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x = 0 \text{을 대입하면 } 3 = a - b + c \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$x = 2 \text{를 대입하면 } 3 = a + b + c \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

①을 ②, ③에 대입하여 정리하면

$$b - c = -1, b + c = 1$$

$$\text{두 식을 연립하면 } b = 0, c = 1$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 0 + 1 = 5$$

10. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3}$ 을 만족하는 모든 실수 x, y 에 대하여 항상 $ax+by+5=0$ 이다. 이때 $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = t \text{라 하면}$$

$$x = 2t - 1, y = 3t + 1$$

이것을 $ax + by + 5 = 0$ 에 대입하면

$$a(2t - 1) + b(3t + 1) + 5 = 0$$

$$(2a + 3b)t + (-a + b + 5) = 0$$

이 식이 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 하므로

$$2a + 3b = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$-a + b + 5 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = 3, b = -2 \quad \therefore a + b = 3 + (-2) = 1$$

해설

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC \text{ 성질 이용}$$

$$3x + 3 = 2y - 2$$

$$3x - 2y + 5 = 0 \text{ 은 } ax + by + 5 = 0$$

$$\therefore a = 3, b = -2$$

11. 다항식 $x^3 + ax + b$ 가 다항식 $x^2 - x + 1$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로

$x^2 = x - 1$ 을 대입하면

$$ax + (b - 1) = 0$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로,

$$a = 0, b - 1 = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 1$$

$$\therefore a + b = 1$$

해설

$$x^3 + ax + b$$

$$= (x^2 - x + 1)Q(x)$$

$$= (x^2 - x + 1)(x + b)$$

$$\therefore b = 1, a = 0$$

12. 등식 $(1+x+x^2)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 의 값은?

① 28

② 26

③ 15

④ 14

⑤ 13

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$3^3 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_8 - \textcircled{\text{㉠}}$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$1^3 = a_0 - a_1 + a_2 + \dots + a_8 - \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}} - \textcircled{\text{㉡}} : 26 = 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 13$$

13. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x+1$ 로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$ 로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

나머지 정리를 이용한다.

주어진 식에 $x = -1$, $x = 2$ 를 각각 대입하면,

$$(-1)^3 + m(-1)^2 + n(-1) + 1 = 5 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(2)^3 + m(2)^2 + n \cdot 2 + 1 = 3 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하면,

$$m = \frac{2}{3}, n = -\frac{13}{3}$$

$$\therefore m - n = 5$$

14. 다항식 $f(x)$ 를 두 일차식 $x-1$, $x-2$ 로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$

② $-x+3$

③ $x-3$

④ $-x-3$

⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$ 를 $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지는 각각 2, 1이므로
 $f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$ 라 하자.

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x) + ax + b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b\end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$ 를 대입하면

$$f(1) = a + b = 2, \quad f(2) = 2a + b = 1$$

두 식을 연립하여 구하면 $a = -1, b = 3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x+3$

15. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나누면 $3x + 2$ 가 남고, 그 몫을 $x - 1$ 로 나누면 2가 남는다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $x^3 - 1$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $\frac{1}{2}R(2)$ 의 값을 구하면?

① 41

② 31

③ 21

④ 11

⑤ 1

해설

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^2 + x + 1)Q(x) + 3x + 2 \\&= (x^2 + x + 1)\{(x - 1)p(x) + 2\} + 3x + 2 \\&= (x^3 - 1)p(x) + 2x^2 + 5x + 4 \\ \therefore R(x) &= 2x^2 + 5x + 4 \\ \therefore \frac{1}{2}R(2) &= 11\end{aligned}$$

16. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx - 1$ 이 $x^2 - 3x + 2$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ 로 놓으면

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$, $x-2$ 로 나누어 떨어진다.

$$f(1) = 1 + a + b - 1 = 0 \text{ 즉, } a + b = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(2) = 8 + 4a + 2b - 1 = 0 \text{ 즉, } 4a + 2b = -7 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{으로부터 } a = -\frac{7}{2}, b = \frac{7}{2}$$

$$\therefore a + b = 0$$

17. 다항식 $ax + ay - bx - by$ 를 인수분해 하면?

① $x(a - b)$

② $(a - b)(x - y)$

③ $(a + b)(x - y)$

④ $(a - b)(x + y)$

⑤ $(a + b)(x + y)$

해설

$$\begin{aligned} ax + ay - bx - by &= a(x + y) - b(x + y) \\ &= (a - b)(x + y) \end{aligned}$$

18. $(x^2 + x)(x^2 + x + 1) - 6$ 을 인수분해하면?

- ① $(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$ ② $(x-1)(x+2)(x^2+x-3)$
③ $(x-2)(x+1)(x^2+x+3)$ ④ $(x-1)(x+2)(x^2-x+3)$
⑤ $(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

해설

$x^2 + x = X$ 라 하자.

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= X(X+1) - 6 \\&= X^2 + X - 6 \\&= (X+3)(X-2) \\&= (x^2 + x + 3)(x^2 + x - 2) \\&= (x-1)(x+2)(x^2 + x + 3)\end{aligned}$$

19. 다음 중 $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$ 을 옳게 인수분해 한 것은?

① $(a - b)^2(a + b)^2$

② $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$

③ $(a - b)^2(a^2 + b^2)$

④ $(a^2 - b^2)(a + b)^2$

⑤ $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)^2$

해설

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + b^2 - 2ab)(a^2 + b^2 + 2ab) \\ &= (a - b)^2(a + b)^2 \end{aligned}$$

20. $x^2 - 2x - y^2 + 2y$ 를 인수분해 하였더니 $(x + ay)(x - by + c)$ 가 된다고 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x - y^2 + 2y \\ &= (x^2 - y^2) - 2(x - y) \\ &= (x + y - 2)(x - y) \\ &= (x + ay)(x - by + c) \end{aligned}$$

계수를 비교하면

$$a = -1, b = -1, c = -2$$

$$\therefore a + b + c = -1 - 1 - 2 = -4$$

21. 다음 □안에 들어갈 식이 바르게 연결되지 않은 것은?

$$\begin{aligned}
 & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\
 &= (b-c)a^2 - \boxed{\text{(가)}}a + \boxed{\text{(나)}}(b-c) \\
 &= \boxed{\text{(다)}} \{a^2 - \boxed{\text{(라)}}a + \boxed{\text{(나)}}\} \\
 &= (b-c)(a-b)\boxed{\text{(마)}}
 \end{aligned}$$

① (가) $(b^2 - c^2)$

② (나) bc

③ (다) $(b-c)$

④ (라) $(b+c)$

⑤ (마) $(c-a)$

해설

$$\begin{aligned}
 & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\
 &= (b-c)a^2 + b^2c - ab^2 + c^2a - bc^2 \\
 &= (b-c)a^2 - \boxed{(b^2 - c^2)}a + \boxed{bc}(b-c) \\
 &= \boxed{(b-c)} \{a^2 - \boxed{(b+c)}a + \boxed{bc}\} \\
 &= (b-c)(a-b)\boxed{(a-c)}
 \end{aligned}$$

22. 세 실수 a, b, c 사이에 $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$ 인 관계가 성립할 때, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 0, 2

④ 0, 1

⑤ 0, 1, 2

해설

$$a^2 - bc = b^2 - ac \text{ 에서 } (a^2 - b^2) + (ac - bc) = 0$$

$$\therefore (a + b + c)(a - b) = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$b^2 - ac = c^2 - ab \text{ 에서 } (b^2 - c^2) + (ab - ac) = 0$$

$$\therefore (a + b + c)(b - c) = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $a + b + c = 0$ 또는 $a = b = c$

$$\text{한편 } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \text{ 이므로}$$

$$\text{i) } a + b + c = 0 \text{ 일 때 } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$\text{ii) } a = b = c \text{ 일 때}$$

$$(\text{준식}) = 3a^3 - 3a^3 = 0$$

$$\text{따라서 } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

23. $(a+1)(a^2-a+1) = a^3+1$ 을 이용하여 $\frac{1999^3+1}{1998 \times 1999 + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2000

해설

$a = 1999$ 라 하면

$$1998 \times 1999 + 1 = (a-1)a + 1 = a^2 - a + 1$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1999^3 + 1}{1998 \times 1999 + 1} &= \frac{a^3 + 1}{a^2 - a + 1} \\ &= \frac{(a+1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1} \\ &= a + 1 = 2000\end{aligned}$$

24. $x^4 + 2x^2 + 9 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ 로 인수분해될 때, $|ab - cd|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2 + 3)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)\end{aligned}$$

여기서 계수를 비교하면

$$a = 2, b = 3, c = -2, d = 3$$

$$\therefore |ab - cd| = |2 \times 3 - (-2) \times 3| = 12$$

25. x 에 관한 3차식 $x^3 + px^2 - q^2$, $x^3 - (3q - p)x + 2(q - 1)$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, pq 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$f(x) = x^3 + px^2 - q^2,$$

$$g(x) = x^3 - (3q - p)x + 2(q - 1) \text{라 놓으면}$$

최대공약수가 $x - 1$ 이므로

$$f(1) = 1 + p - q^2 = 0 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$g(1) = 1 - (3q - p) + 2(q - 1) = 0 \text{에서}$$

$$p - q - 1 = 0 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{에서 } q^2 - q - 2 = 0, (q - 2)(q + 1) = 0$$

$$(i) \ q = 2 \text{일 때, } \textcircled{\text{㉡}} \ p = 3$$

$$f(x) = (x - 1)(x + 2)^2, \ g(x) = (x - 1)^2(x + 2)$$

$\therefore G.C.D$ 가 $x - 1$ 이라는 것에 모순

$$(ii) \ q = -1 \text{일 때, } \textcircled{\text{㉡}} \ p = 0$$

$$f(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1),$$

$$g(x) = (x - 1)(x^2 + x + 4)$$

$\therefore G.C.D$ 는 $x - 1$

$$\therefore pq = 0$$