1. 세 다항식 $A = 2x^2y - xy^2 + y^3$, $B = -2xy^2 + 2y^3$, $C = x^3 + y^3$ 에 대하여 $(2A - B) + C$ 를 계산하면?

① $2x^3 - 4x^2y + 3y^3$

② $-x^3 + 2x^2y - y^3$

③ $2x^3 + 4x^2y - y^2$

④ $x^3 + 4x^2y + y^3$

⑤ $x^3 + 4y^3$

해설

$(2A - B) + C$
$= 4x^2y - 2xy^2 + 2y^3 - (-2xy^2 + 2y^3) + x^3 + y^3$
$= x^3 + 4x^2y + y^3$

해설

$(2A - B) + C$
$= x^3 + 4x^2y + y^3$

2. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$일 때, $2A + B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A + B &= 2(a+2b) + (2a+3b) \\ &= (2a+4b) + (2a+3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a + (4b+2a) + 3b && \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a + (2a+4b) + 3b && \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a+2a) + (4b+3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2+2)a + (4+3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a + 7b \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a+4b) + 3b = (2a+2a) + (4b+3b)$: 결합법칙

3. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + a$를 $x^2 + x + 1$로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a의 값을 구하면?

① -3　② 3　③ -6　④ 6　⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.
$\therefore a - 3 = 0, a = 3$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$이 되는 x값을 대입한다.
$x^2 + x + 1 = 0$에서 $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0,\ x^3 - 1 = 0$
$\therefore x^3 = 1$
준 식의 좌변에 $x^3 = 1,\ x^2 = -x - 1$을 대입하면
$2x - 1 + 2(-x - 1) + a = 0,\ a - 3 = 0$
$\therefore\ a = 3$

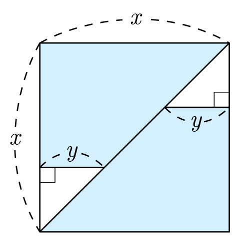
4. 다항식 $2x^2+5ax-a^2$을 다항식 $P(x)$로 나눈 몫이 $x+3a$, 나머지가 $2a^2$일 때, 다항식 $(x+a)P(x)$를 나타낸 것은?

① $x^2+2ax-2a^2$ ② x^2-a^2
③ $2x^2+3ax+a^2$ ④ $2x^2-3ax-a^2$
⑤ $2x^2+ax-a^2$

해설

$2x^2+5ax-a^2=P(x)(x+3a)+2a^2$이므로
$P(x)(x+3a)=2x^2+5ax-3a^2$
따라서, 다항식 $P(x)$는 $2x^2+5ax-3a^2$을 $x+3a$로 나눈 몫이므로
$P(x)=2x-a$
$\therefore\ (x+a)P(x)=(x+a)(2x-a)$
$=2x^2+ax-a^2$

5. 다음 그림은 한변의 길이가 x인 정사각형을 대각선을 따라 자른 후 직각이등변삼각형 2개를 떼어낸 도형이다. 이때, 색칠한 부분의 넓이를 x, y에 관한 식으로 나타내어라.



① $xy - y^2$　② $x^2 - y^2$　③ $x^2 - y$

④ $\dfrac{xy - y^2}{2}$　⑤ $\dfrac{x - y}{2}$

해설

$x^2 - 2 \times \dfrac{1}{2} \times y \times y = x^2 - y^2$

6. $(a+b-c)(a-b+c)$를 전개하면?

① $a^2+b^2-c^2-2bc$
② $a^2-b^2+c^2-2bc$
③ $a^2+b^2-c^2+2ab$
④ $a^2-b^2-c^2+2bc$
⑤ $a^2-b^2-c^2-2ab$

해설

$(a+b-c)(a-b+c)$
$=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$
$=a^2-(b-c)^2$
$=a^2-b^2-c^2+2bc$

7. 다항식 $(5x^2+3x+1)^2$ 을 전개하였을 때, x^2 의 계수는?

① 10　　② 13　　③ 16　　④ 19　　⑤ 25

해설

$(5x^2+3x+1)(5x^2+3x+1)$ 에서

ⅰ) (일차항)×(일차항) 의 경우 $9x^2$

ⅱ) (이차항)×(상수항) 의 경우 $2\times 5x^2$

즉, $5x^2+5x^2+9x^2=19x^2$

$\therefore$ 19

8. $ax^2-(2a+c)x-1=(b-2)x^2-c$가 x의 값에 관계없이 항상 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① -1　② 2　③ 4　④ 6　⑤ 8

해설

양변의 계수를 비교하면

$a=b-2 \quad \cdots$ ㉠

$2a+c=0 \quad \cdots$ ㉡

$1=c \quad \cdots$ ㉢

$\therefore\ a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2},\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=2$

9. 등식 $x^2-2x+3=a+b(x-1)+c(x-1)^2$이 x에 관한 항등식일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$x^2-2x+3=a+b(x-1)+c(x-1)^2$
$x=1$을 대입하면 $2=a$ ……①
$x=0$을 대입하면 $3=a-b+c$ ……②
$x=2$를 대입하면 $3=a+b+c$ ……③
①을 ②, ③에 대입하여 정리하면
$b-c=-1,\ b+c=1$
두 식을 연립하면 $b=0,\ c=1$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2=4+0+1=5$

10. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3}$을 만족하는 모든 실수 x, y에 대하여 항상 $ax+by+5=0$이다. 이때 $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = t$라 하면
$x = 2t-1$, $y = 3t+1$
이것을 $ax+by+5=0$에 대입하면
$a(2t-1)+b(3t+1)+5=0$
$(2a+3b)t+(-a+b+5)=0$
이 식이 모든 실수 t에 대하여 성립해야 하므로
$2a+3b=0 \cdots ①$
$-a+b+5=0 \cdots ②$
①, ②를 연립하여 풀면
$a=3$, $b=-2$ $\therefore$ $a+b=3+(-2)=1$

해설

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC$ 성질 이용
$3x+3=2y-2$
$3x-2y+5=0$은 $ax+by+5=0$
$\therefore a=3$, $b=-2$

11. 다항식 x^3+ax+b가 다항식 x^2-x+1로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
$x^2=x-1$을 대입하면
$ax+(b-1)=0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로,
$a=0,\ b-1=0$
$\therefore\ a=0,\ b=1$
$\therefore a+b=1$

해설

x^3+ax+b
$=(x^2-x+1)Q(x)$
$=(x^2-x+1)(x+b)$
$\therefore\ b=1,\ a=0$

12. 등식 $(1+x+x^2)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 의 값은?

① 28 ② 26 ③ 15 ④ 14 ⑤ 13

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면
$3^3 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_8 - ㉠$
양변에 $x = -1$을 대입하면
$1^3 = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + a_8 - ㉡$
㉠ − ㉡ : $26 = 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$
$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 13$

13. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 5

해설

나머지 정리를 이용한다.
주어진 식에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면,
$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5\cdots$㉠
$(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하면,
$m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{13}{3}$
$\therefore\ m-n=5$

14. 다항식 $f(x)$를 두 일차식 $x-1,\ x-2$로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$　② $-x+3$　③ $x-3$

④ $-x-3$　⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$를 $x-1,\ x-2$로 나눈 나머지는 각각 $2, 1$이므로
$f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$라 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1,\ x=2$를 대입하면
$f(1)=a+b=2,\ f(2)=2a+b=1$
두 식을 연립하여 구하면 $a=-1, b=3$
$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x+3$

15. 다항식 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누면 $3x+2$가 남고, 그 몫을 $x-1$로 나누면 2가 남는다. 이 다항식 $f(x)$를 x^3-1로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $\frac{1}{2}R(2)$의 값을 구하면?

① 41　② 31　③ 21　④ 11　⑤ 1

해설

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x^2+x+1)Q(x)+3x+2 \\
&= (x^2+x+1)\{(x-1)p(x)+2\}+3x+2 \\
&= (x^3-1)p(x)+2x^2+5x+4
\end{aligned}
$$

$\therefore R(x)=2x^2+5x+4$

$\therefore \frac{1}{2}R(2)=11$

16. 다항식 x^3+ax^2+bx-1이 x^2-3x+2로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x)=x^3+ax^2+bx-1$ 로 놓으면
$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$, $x-2$ 로 나누어 떨어진다.
$f(1)=1+a+b-1=0$ 즉, $a+b=0\cdots$ ㉠
$f(2)=8+4a+2b-1=0$ 즉, $4a+2b=-7\cdots$ ㉡
㉠, ㉡으로부터 $a=-\frac{7}{2}$, $b=\frac{7}{2}$
$\therefore a+b=0$

17. 다항식 $ax+ay-bx-by$를 인수분해 하면?

① $x(a-b)$　② $(a-b)(x-y)$　③ $(a+b)(x-y)$
④ $(a-b)(x+y)$　⑤ $(a+b)(x+y)$

해설

$$\begin{aligned}ax+ay-bx-by &= a(x+y)-b(x+y)\\ &= (a-b)(x+y)\end{aligned}$$

18. $(x^2+x)(x^2+x+1)-6$을 인수분해하면?

① $(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$　② $(x-1)(x+2)(x^2+x-3)$
③ $(x-2)(x+1)(x^2+x+3)$　④ $(x-1)(x+2)(x^2-x+3)$
⑤ $(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

해설

$x^2+x=X$라 하자.

(준식) $=X(X+1)-6$
$=X^2+X-6$
$=(X+3)(X-2)$
$=(x^2+x+3)(x^2+x-2)$
$=(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$

19. 다음 중 $(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$ 을 옳게 인수분해 한 것은?

① $(a-b)^2(a+b)^2$
② $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$
③ $(a-b)^2(a^2+b^2)$
④ $(a^2-b^2)(a+b)^2$
⑤ $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)^2$

해설

$\left(a^2+b^2\right)^2-4a^2b^2$
$=\left(a^2+b^2-2ab\right)\left(a^2+b^2+2ab\right)$
$=(a-b)^2(a+b)^2$

20. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

x^2-2x-y^2+2y
$=(x^2-y^2)-2(x-y)$
$=(x+y-2)(x-y)$
$=(x+ay)(x-by+c)$
계수를 비교하면
$a=-1, b=-1, c=-2$
$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

21. 다음 □안에 들어갈 식이 바르게 연결되지 <u>않은</u> 것은?

$$
\begin{aligned}
&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) \\
&= (b-c)a^2 - \boxed{\text{(가)}}\,a + \boxed{\text{(나)}}\,(b-c) \\
&= \boxed{\text{(다)}}\,\{a^2 - \boxed{\text{(라)}}\,a + \boxed{\text{(나)}}\} \\
&= (b-c)(a-b)\boxed{\text{(마)}}
\end{aligned}
$$

① (가) (b^2-c^2)　② (나) bc　③ (다) $(b-c)$

④ (라) $(b+c)$　⑤ (마) $(c-a)$

해설

$$
\begin{aligned}
&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) \\
&= (b-c)a^2 + b^2c - ab^2 + c^2a - bc^2 \\
&= (b-c)a^2 - \boxed{(b^2-c^2)}\,a + \boxed{bc}\,(b-c) \\
&= \boxed{(b-c)}\left\{a^2 - \boxed{(b+c)}\,a + \boxed{bc}\right\} \\
&= (b-c)(a-b)\boxed{(a-c)}
\end{aligned}
$$

22. 세 실수 a, b, c 사이에 $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$ 인 관계가 성립할 때, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 0, 2
④ 0, 1　　⑤ 0, 1, 2

해설

$a^2 - bc = b^2 - ac$ 에서 $(a^2 - b^2) + (ac - bc) = 0$
$\therefore\ (a+b+c)(a-b) = 0 \cdots$ ㉠
$b^2 - ac = c^2 - ab$ 에서 $(b^2 - c^2) + (ab - ac) = 0$
$\therefore\ (a+b+c)(b-c) = 0 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a+b+c=0$ 또는 $a=b=c$
한편 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 이므로
i) $a+b+c=0$ 일 때 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$
ii) $a=b=c$ 일 때
(준식)$= 3a^3 - 3a^3 = 0$
따라서 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

23. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$을 이용하여 $\dfrac{1999^3+1}{1998\times1999+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2000

해설

$a=1999$라 하면

$1998\times1999+1=(a-1)a+1=a^2-a+1$

$$\therefore \frac{1999^3+1}{1998\times1999+1}=\frac{a^3+1}{a^2-a+1}$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$

$$=a+1=2000$$

24. $x^4 + 2x^2 + 9 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$로 인수분해될 때, $|ab - cd|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

(준식) $= (x^2 + 3)^2 - (2x)^2$

$= (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)$

여기서 계수를 비교하면

$a = 2,\ b = 3,\ c = -2,\ d = 3$

$\therefore |ab - cd| = |2 \times 3 - (-2) \times 3| = 12$

25. x에 관한 3차식 $x^3+px^2-q^2$, $x^3-(3q-p)x+2(q-1)$의 최대공약수가 $x-1$일 때, pq의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x) = x^3 + px^2 - q^2$,
$q(x) = x^3 - (3q-p)x + 2(q-1)$라 놓으면
최대공약수가 $x-1$이므로
$f(1) = 1 + p - q^2 = 0 \cdots$ ㉠
$g(1) = 1 - (3q-p) + 2(q-1) = 0$에서
$p - q - 1 = 0 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $q^2 - q - 2 = 0$, $(q-2)(q+1) = 0$
(i) $q = 2$일 때, ㉡ $p = 3$
$f(x) = (x-1)(x+2)^2$, $g(x) = (x-1)^2(x+2)$
$\therefore$ $G.C.D$가 $x-1$이라는 것에 모순
(ii) $q = -1$일 때, ㉡ $p = 0$
$f(x) = (x-1)(x^2+x+1)$,
$g(x) = (x-1)(x^2+x+4)$
$\therefore$ $G.C.D$는 $x-1$
$\therefore$ $pq = 0$