1. p_n 이 다음과 같을 때, $f(p_n) = 1$ (p_n이 명제이면) $f(p_n) = -1$ (p_n이 명제가 아니면) 로 정의한다. 이 때, $f(p_1) + f(p_2) + f(p_3)$ 의 값을 구하면? (단, $n = 1, 2, 3$)

$p_1 : x^2 - x - 2 = 0$ p_2 : 16의 양의 약수는 모두 짝수이다. p_3 : $\sqrt{3}$ 은 유리수이다.

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$f(p_n) = \begin{cases} 1 \ (p_n\text{이 명제이다.}) \\ -1 \ (p_n\text{이 명제가 아니다.}) \end{cases}$$

p_1 : $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow$ 명제가 아니다.($\because$ x 값에 따라 참 일수도 거짓일수도 있다.)

p_2 : 거짓, p_3 : 거짓 $\rightarrow$ 모두 거짓인 명제이다.

$\therefore$ $f(p_1) + f(p_2) + f(p_3) = (-1) + 1 + 1 = 1$

2. a, b, c 가 실수일 때, '$a^2+b^2+c^2=0$ 이다' 의 부정은?

① $a=0$ 또는 $b=0$ 또는 $c=0$

② $abc \neq 0$

③ $a \neq b \neq c$

④ a, b, c 모두 0 이 아니다.

⑤ a, b, c 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

해설

$a^2+b^2+c^2=0 \leftrightarrow a=b=c=0$, $a=b=c=0$ 의 부정은 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 또는 $c \neq 0$ 이다.
즉, a, b, c 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

3. 정의역과 공역이 실수 전체의 집합인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 두 조건 $p: f(x)=0$, $q: g(x)=0$ 을 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 조건 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=0$ 을 만족하는 집합은?

① $P \cap Q$ ② $P \cup Q$ ③ $P-Q$
④ $Q-P$ ⑤ $P^c \cup Q^c$

해설

조건 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=0$ 을 만족시키는 집합은 $\{x \mid f(x)=0$이고 $g(x)=0\}$ 이므로
주어진 조건을 만족하는 집합은 $P \cap Q$

4. 다음 보기의 명제 중 참인 것을 모두 고르면?

㉠ $a > b$이면 $a^2 > b^2$이다.

㉡ 정사각형은 마름모이다.

㉢ 임의의 유리수 x에 대하여 $\sqrt{2}x$는 무리수이다.

㉣ $a + b > 0$이면 $a > 0$이고 $b > 0$이다.

㉤ x가 6의 약수이면 x는 12의 약수이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉢ ③ ㉢, ㉣ ④ ㉡, ㉤ ⑤ ㉣, ㉤

해설

(반례) ㉠ $a = 1, b = -4$ ㉢ $x = 0$ ㉣ $a = 5, b = -4$

$\therefore$ ㉡, ㉤만 참이다.

5. 전체집합을 $U = \{-1,\ 0,\ 1\}$이라 할 때, 전체집합 U에 대하여 다음 중 참인 명제는?

① 모든 x에 대하여 $x^2 > 1$이다.

② 임의의 x, y에 대하여 $x + y \le 1$이다.

③ 어떠한 x에 대하여도 $x^2 + 2x \ge -1$ 이다.

④ 적당한 x, y에 대하여 $x^2 - y^2 > 1$이다.

⑤ $x^2 + x < x^3$ 인 x가 존재한다.

해설

① 반례 : $x = 0$ 일 때 $x^2 = 0$ 이므로 주어진 명제 는 거짓이다.
② 반례 : $x = y = 1$ 일 때 $x + y = 2 \ge 1$ 이므로 주 어진 명제는 거짓이다.
③ 모든 x 에 대하여 $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \ge 0$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
④ 모든 x, y 에 대하여 $x^2 - y^2 \le 1$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
⑤ 모든 x 에 대하여 $x^2 + x \ge x^3$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

6. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

'n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.'

▶ 답 : ________ 가지

▷ 정답 : 8가지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$n \in \{6 \times 1,\ 6 \times 3,\ 6 \times 5,\ 6 \times 7,\ 6 \times 9,\ 6 \times 11,\ 6 \times 13,\ 6 \times 15\}$

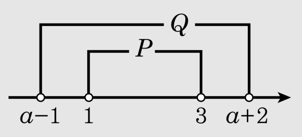
7. $1 < x < 3$ 을 만족하는 모든 실수 x 에 대하여 $a-1 < x < a+2$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $1 \le a \le 2$　　② $1 \le a \le 3$　　③ $1 < a < 3$

④ $-1 < a < 5$　　⑤ $-1 \le a \le 5$

해설

집합 $P = \{x \mid 1 < x < 3\}$,
$Q = \{x \mid a-1 < x < a+2\}$ 로 놓으면 모든 $x \in P$ 에 대하여 $x \in Q$ 이므로 $P \subset Q$ 이다. 이를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$a-1 \le 1$, $a+2 \ge 3$

$\therefore\ 1 \le a \le 2$

8. 실수 x에 대하여 다음 명제가 참일 때, a의 최솟값을 구하여라.

$x > a$이면 $\lvert x-2\rvert > 4$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 명제가 참이므로
대우 '$\lvert x-2\rvert \le 4$ 이면 $x \le a$ 이다.' 가 참이다.
$\lvert x-2\rvert \le 4$ 에서
$-4 \le x-2 \le 4$, $-2 \le x \le 6$이므로
$\therefore\ a \ge 6$
따라서 a 의 최솟값은 6이다.

9. 명제 $p \to \sim q$ 와 $\sim p \to r$ 가 모두 참일 때, 다음 중에서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $q \to \sim p$ ② $\sim r \to p$ ③ $q \to r$

④ $\sim r \to \sim q$ ⑤ $q \to \sim r$

해설

$p \to \sim q$ 가 참이면 대우

$\underbrace{q \to \sim p}_{㉠}$(①) 도 참이다.

$\underbrace{\sim p \to r}_{㉡}$ 가 참이면 대우 $\sim r \to p$(②) 도 참이다.

㉠, ㉡에서 $q \to \sim p$ 가 참이고 $\sim p \to r$ 가 참이므로 $q \to r$(③) 도 참이다.

또한, $q \to r$ 가 참이므로 대우인 $\sim r \to \sim q$(④) 도 참이다.

따라서, 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

10. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 「n^2이 홀수이면 n도 홀수이다.」임을 증명한 것이다.

> [증명]
> 주어진 명제의 (가)를 구해보면,
> 「n이 짝수이면 n^2도 짝수이다. 」
> 이 때, n이 짝수이면
> $n=$(나) (단, k는 자연수)로 놓을 수 있다.
> 따라서 $n^2=4k^2=2(2k^2)$이므로 n^2도 짝수이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나) 안에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 대우, $2k$　② 대우, $4k$　③ 대우, $2k+1$
④ 역, $2k+1$　⑤ 역, $4k^2$

해설

[증명]
주어진 명제의 대우를 구해보면,
「n이 짝수이면 n^2도 짝수이다. 」
이 때, n이 짝수이면
$n=(2k)$ (단, k는 자연수)로 놓을 수 있다.
따라서 $n^2=4k^2=2(2k^2)$이므로 n^2도 짝수이다.

11. 두 조건 $p : |x-1| = 2$, $q : x^2 + 2x + 1 = 0$ 에서 p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ______조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

주어진 조건의 진리집합이
$P = \{-1,\ 3\},\ Q = \{-1\}$ 이므로 $Q \subset P$

12. $x \le -1$ 은 $x \le a$ 이기 위한 필요조건이고, $x \ge b$ 는 $x \ge 3$ 이기 위한 충분조건일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

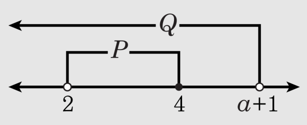
$x \le -1$ 은 $x \le a$ 이기 위한 필요조건이므로
「$x \le a$ 이면 $x \le -1$ 이다.」가 참이어야 한다.
$\therefore\ a \le -1$
또, $x \ge b$ 는 $x \ge 3$ 이기 위한 충분조건이므로
「$x \ge b$ 이면 $x \ge 3$ 이다.」가 참이어야 한다.
$\therefore\ b \ge 3$
따라서, a 의 최댓값은 -1, b 의 최솟값은 3 이므로
구하는 값은 $-1 + 3 = 2$ 이다.

13. 두 조건 $p : 2 < x \leq 4, q : x < a + 1$에 대하여 p는 q 이기 위한 충분조건 일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a > 3$

해설



$p \rightarrow q$이므로 $a + 1 > 4 \Rightarrow a > 3$

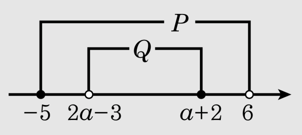
14. 두 조건 $p : -5 \leq x < 6$, $q : 2a - 3 < x \leq a + 2$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : $a = 5$ 개

해설

두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하면
$P = \{x \mid -5 \leq x < 6\}$,
$Q = \{x \mid 2a - 3 < x \leq a + 2\}$
이때, p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
$\therefore\ Q \subset P$
따라서, 다음 수직선에서



$2a - 3 \geq -5$ 이고 $a + 2 < 6$
$2a \geq -2$ 이고 $a < 4$
$\therefore\ -1 \leq a < 4$
따라서, 정수 a 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5 개이다.

15. 네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$ 에 대하여 $p,\ q$ 는 각각 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지를 말하여라.

▶ 답 : ______ 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$
q 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$
s 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow s$
q 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow q$
따라서, $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$
$\therefore\ p \Rightarrow q$
그러나 $q \Rightarrow p$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore p$는 q이기 위한 충분조건이다.

16. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라고 하면 $P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참인 명제가 아닌 것은?

① $r \to p$　　② $\sim p \to \sim q$　　③ $\sim p \to \sim r$

④ $\sim r \to \sim p$　　⑤ $\sim q \to \sim r$

해설

$P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 이면
$Q \subset P, R \subset Q$ 이므로 $q \to p$, $r \to q$ 가 참
$R \subset Q \subset P$ 이므로 $r \to p$ 가 참
$Q \subset P, R \subset Q$ 이면 $Q^c \supset P^c, R^c \supset Q^c$ 이므로 $\sim p \to \sim q$, $\sim q \to \sim r$ 이 참

해설

'주어진 명제가 참일 때, 그 대우도 참'을 이용하여 $q \to p$, $r \to q$ 가 참이면 $\sim p \to \sim q$, $\sim q \to \sim r$ 가 참임을 쉽게 판단할 수 있다.

17. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

① $xy \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$

② $x+y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$

③ $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$

④ $x \leq 2$ 이면 $|x-1| \leq |x-3|$

⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2+b^2 > 0$

해설

① 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=-1$ 일 때,
$xy = 2 \geq 0$ 이지만 $-2<0$ 이고 $-1<0$ 이다.
② 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=3$ 일 때,
$x+y=-2+3 \geq 0$ 이지만 $-2<0$ 이고 $3>0$ 이다.
③ 거짓 : (반례) $x=2,\ y=-2$ 일 때,
$2 \geq -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.
④ $|x-1| \leq |x-3|$ 의 양변을 제곱하면
$x^2-2x+1 \leq x^2-6x+9$ 에서 $x \leq 2$ 이므로 원래의 명제와 그 역이 모두 참이다.
⑤ 명제 '$a>0$ 이고 $b>0$ 이면 $a^2+b^2>0$' 은 참이지만, 그의 역 '$a^2+b^2>0$ 이면 $a>0$ 이고 $b>0$'은 거짓이다.

18. 두 조건 p, q가 p : $|x| < a$, q : $|x-1| \geq 3$과 같이 주어져 있다. 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참일 때, 양수 a의 범위를 구하면?

① $0 < a \leq 4$ ② $a > 4$ ③ $a \geq 4$

④ $a > 2$ ⑤ $2 \leq a \leq 4$

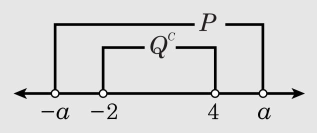
해설

$\sim p \rightarrow q \Rightarrow \ \sim q \ \rightarrow \ p \Rightarrow \ Q^c \subset P$

$P = \{x | -a < x < a\}$

$Q = \{x | x \leq -2$ 또는 $x \geq 4\}$

$Q^c = \{x | -2 < x < 4\}$



$-a \leq -2 \rightarrow a \geq 2$, $a \geq 4$

$\therefore a \geq 4$

19. 한쪽 면에는 숫자, 다른 쪽 면에는 영문자가 쓰여진 카드가 다음 규칙을 만족한다. '카드의 한쪽 면에 홀수가 적혀 있으면 다른 쪽 면에는 자음이 적혀 있다.' 탁자 위에 그림과 같이 놓인 카드 4장이 위 규칙에 맞는 카드인지 알기 위해 다른 쪽 면을 반드시확인해야할 필요가 있는 것은?

$\boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{k}\ \boxed{u}$

① $\boxed{7}\ \boxed{u}$

② $\boxed{7}\ \boxed{k}$

③ $\boxed{2}\ \boxed{u}$

④ $\boxed{2}\ \boxed{k}$

⑤ $\boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{k}\ \boxed{u}$

해설

주어진 규칙의 대우는 '한 쪽 면에 모음이 적혀 있으면 다른 쪽 면에는 짝수가 적혀있다.' 이다. 따라서 홀수가 적혀있는 카드와 모음이 적혀 있는 카드만 확인하면 된다.

20. 다음은 실수 x, y 에 대하여 「$x^2+y^2=1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다」가 참임을 증명한 것이다. 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

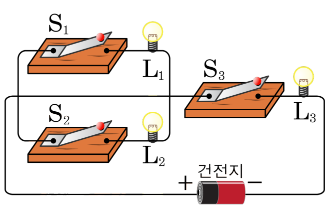
주어진 명제 '$x^2+y^2=1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다' 의 대우인 '(가)이면 $x^2+y^2 \ne 1$ 이다' 가 참임을 증명하면 된다. (가)에서 $x^2+y^2>$ (나) 이므로 $x^2+y^2 \ne 1$ 가 성립한다. 따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 (다)이다.

① $x>1$ 이고 $y>1$, 1 , 참
② $x>1$ 이고 $y>1$, 2 , 참
③ $x>1$ 또는 $y>1$, 2 , 참
④ $x \ge 1$ 또는 $y \ge 1$, 1 , 거짓
⑤ $x \ge 1$ 이고 $y \ge 1$, 2 , 거짓

해설

$x \le 1$ 또는 $y \le 1$의 부정은 $x>1$ 이고 $y>1$ 이다.
x, y 가 모두 1 보다 크므로 x 의 제곱수와 y 의 제곱수를 더한 값은 무조건 2 보다 크게 된다.
또한, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이 된다.

21. 다음 그림과 같은 스위치 회로에 대하여 보기에서 옳은 것을 <u>모두</u> 고른 것은?



보기

㉠ 스위치 S_1, S_2, S_3가 모두 닫히는 것은 전구 L_1 이 켜지기 위한 충분조건이다.
㉡ 스위치 S_2 와 S_3가 모두 닫히는 것은 전구 L_3 가 켜지기 위한 필요조건이다.
㉢ 스위치 S_2 또는 S_3가 닫히는 것은 전구 L_2 와 L_3 가 모두 켜지기 위한 필요충분 조건이다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉢
④ ㉠, ㉡　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉡ 충분
㉢ 관계성립하는 경우가 아님

22. 두 조건 $p : x \le 3 - a$ 또는 $x \ge a$, $q : |x| \le 7$에 대하여 p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하면? (단, $a \ge 3$)

① $a > 10$　　② $a > 7$　　③ $a > 3$

④ $a > -1$　　⑤ $a > -4$

해설

p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로
$p \rightarrow \sim q$ 의 대우명제 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이다.
p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
$Q \subset P^c$ 이므로
$P^c = \{x \mid 3 - a < x < a\}$,
$Q = \{x \mid -7 \le x \le 7\}$ 이므로
$3 - a < -7$, $a > 7$
따라서 $a > 10$,$a > 7$ 이므로 $a > 10$

23. 전체집합 U의 임의의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 <보기> 의 (가), (나)에 들어갈 것을 순서대로 나열한 것은?

보기

(1) $A \subset B$는 $A - B = \varnothing$이 되기 위한 $\boxed{\text{(가)}}$ 조건이다.
(2) $B = C$는 $A \cup B = A \cup C$이 되기 위한 $\boxed{\text{(나)}}$ 조건이다.

① 필요, 필요충분 ② 필요, 필요
③ 필요충분, 필요충분 ④ 필요충분, 충분
⑤ 충분, 필요충분

해설

(1)은 명제, 역 모두 성립하는 필요충분조건이고,
(2)는 역일 경우에 성립하지 않는 경우가 있으므로 충분조건이다.
(반례) 역의 경우에서 $A \supset B$, $A \supset C$, $B \subset C$이면 성립하지 않는다.

24. 네 조건 p, q, r, s에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건, r은 q이기 위한 필요조건, s는 $\sim r$이기 위한 충분조건 일 때 다음 중 옳은 것은?

① $r \rightarrow q$　② $q \rightarrow \sim p$　③ $s \rightarrow \sim q$
④ $\sim s \rightarrow \sim p$　⑤ $\sim r \rightarrow p$

해설

$p \rightarrow q \quad s \rightarrow \sim r \quad q \rightarrow r$
$q \rightarrow r$의 대우 : $\sim r \rightarrow \sim q$
$\therefore s \rightarrow \sim r, \sim r \rightarrow \sim q$ 이므로 $s \rightarrow \sim q$