

1. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \cup B = B \cup A$

② $A \cup \emptyset = A$

③ $(A \cap B) \subset A$

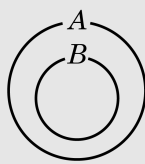
④ $B \subset A$ 이면 $A \cup B = A$

⑤ $B \subset A$ 이면 $A \cap B = A$

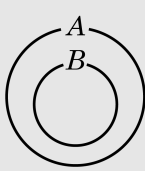
해설

③ $(A \cap B) \subset A, (A \cap B) \subset B$

④ $B \subset A$ 이면 $A \cup B = A$



⑤ $B \subset A$ 이면 $A \cap B = B$



2. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 15 \text{ 이하의 홀수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cap B^c = \{3, 5\}, B - A = \{7, 11\}, A \cap B = \{13, 15\}$ 일 때, $(A \cup B)^c$ 는?

① $\{1\}$ ② $\{7\}$ ③ $\{9\}$ ④ $\{1, 7\}$ ⑤ $\{1, 9\}$

해설

$U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$, $A \cap B^c = \{3, 5\}, B - A = \{7, 11\}, A \cap B = \{13, 15\}$
이므로 $(A \cup B)^c = \{1, 9\}$ 이다.

3. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?(정답 2개)

① $B - A = \emptyset$

② $A \cap B^c = A$

③ $A^c \subset B^c$

④ $(A \cap B^c) \cap (B \cap A^c) = \emptyset$

⑤ $U^c \subset \emptyset$

해설

① $B - A = \emptyset$

② $A \cap B^c = \emptyset$

③ $B^c \subset A^c$

4. 두 집합 $A = \{2, 5, a, 9\}$, $B = \{3, 7, b-2, b+2\}$ 에 대하여 $A-B = \{2, 8\}$ 일 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

집합 A 에서 $a=8$
 $A \cap B = \{5, 9\}$ 이므로
(i) $b+2=5$ 일 때, $b=3$ 이므로
 $B = \{1, 3, 5, 7\}$ $A \cap B = \{5\}$ (×)
(ii) $b-2=5$ 일 때, $b=7$ 이므로
 $B = \{3, 5, 7, 9\}$ $A \cap B = \{5, 9\}$ (○)
 $\therefore a-b=8-7=1$

5. 다음 명제 중에서 참인 것의 개수는?

- ㉠ 정수 n 에 대하여, n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.

㉡ $xy \neq 6$ 이면 $x \neq 2$ 이거나 $y \neq 3$ 이다.

㉢ x, y 가 실수일 때, $x + y > 0$ 이면 $x > -1$ 또는 $y > 1$ 이다.

㉣ $x + y$ 가 유리수이면 x, y 중 적어도 하나는 유리수이다.

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

㉠, ㉡, ㉣의 경우 그 대우를 적어 보면
㉠의 대우: 정수 n 에 대하여, n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.
㉡의 대우: $x = 2$ 이고 $y = 3$ 이면 $xy = 6$ 이다.
㉣의 대우: x, y 가 실수일 때, $x \leq -1$ 이고 $y \leq 1$ 이면 $x + y \leq 0$ 이다. 이것은 모두 참임을 알 수 있다.
㉢의 반례: $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ 이면 $x + y$ 가 유리수지만 x, y 는 모두 무리수이다.

6. 다음에서 조건 p 는 조건 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은? (단, a, x, y 는 실수)

① $p : a < 0, q : \sqrt{a^2} = -a$

② $p : xy < 0, q : x < 0$ 이고 $y > 0$

③ $p : xy = 0, q : x = 0$ 또는 $y = 0$

④ $p : A \cup (B - A) = B, q : A \subset B$

⑤ $p : x, y$ 가 유리수, $q : x + y, xy$ 가 유리수

해설

② 충분조건일 때 의 반례는 $x > 0$ 이고, $y < 0$ 인 경우이다.

7. $a^2 + b^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ 일 때, $ax + by$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 ?

① $-4 \leq ax + by \leq 4$

② $-9 \leq ax + by \leq 9$

③ $-6 \leq ax + by \leq 6$

④ $0 \leq ax + by \leq 36$

⑤ $-36 \leq ax + by \leq 36$

해설

$a^2 + b^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ 이면
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ 에서
 $4 \cdot 9 \geq (ax + by)^2$
 $\therefore -6 \leq ax + by \leq 6$

8. 자연수를 원소로 가지는 집합 S 가 조건 ' $x \in S$ 이면 $(4 - x) \in S$ 이다.' 를 만족한다. 이 때, 집합 S 의 개수는?

- ① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

집합 S 의 원소는 자연수이어야 하므로 x 가 자연수이어야 한다.
또한, 조건 ' $x \in S$ 이면 $(4 - x) \in S$ '로부터 x 가 S 의 원소이면 $(4 - x)$ 도 S 의 원소이므로 $(4 - x)$ 도 자연수이다. $1 \in S$ 이면 $(4 - 1) \in S$, 즉 $3 \in S$, $2 \in S$ 이면 $(4 - 2) \in S$, 즉 $2 \in S$, $3 \in S$ 이면 $(4 - 3) \in S$, 즉 $1 \in S$ 이므로 1과 3은 동시에 S 의 원소이거나 S 의 원소가 아니어야 한다.

한편, 2는 혼자서 S 의 원소이거나 S 의 원소가 아닐 수 있다.
따라서 두 집합 $S_1 = \{2\}$, $S_2 = \{1, 3\}$ 의 원소들을 동시에 갖거나 갖지 않는 모든 집합들을 보면 S_1 만을 가질 때에는 $\{2\}$, S_2 만을 가질 때에는 $\{1, 3\}$, S_1 , S_2 를 모두 가질 때에는 $\{1, 2, 3\}$ 이다.
따라서 3개이다.

9. 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 를 조건제시법으로 나타낸 것 중 옳지 않은 것은?

- ① $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 3 \text{인 정수}\}$
② $A = \{x \mid -1 < x \leq 3 \text{인 정수}\}$
③ $A = \{x \mid x \text{는 자연수를 4로 나눈 나머지}\}$
④ $A = \{x \mid 0 \leq x < 4 \text{인 수}\}$
⑤ $A = \{x \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2} \text{인 정수}\}$

해설

- ④ $\{x \mid 0 \leq x < 4 \text{인 수}\}$ 에는 0, 1, 2, 3 이외에도 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 2, 5, \dots$ 등 무수히 많은 원소가 있다.

10. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수를 모두 골라라.

2, 3, 9, 11, 15, 18

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 9

해설

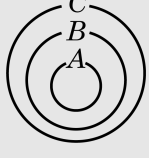
$A \subset B$ 이면 $\square$ 는 9의 약수이어야 한다. 따라서, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수는 1, 3, 9 중 하나이며 보기 중에는 3, 9이다.

11. 세 집합 A, B, C 에 대하여 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

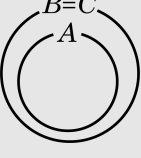
- ① $A \subset B, B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.
- ② $A \subset B, B = C$ 이면 $A \subset C$ 이다.
- ③ $A \subset B, B \subset C$ 이면 $A = B$ 이다.
- ④ $A \subset B, B \subset C, C \subset A$ 이면 $A = B = C$ 이다.
- ⑤ $A \subset B \subset C$ 이면 $n(A) < n(B) < n(C)$ 이다.

해설

①



②



③ 예를 들면 $A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{1, 2, 3\}$ 이면, $A \subset B, B \subset C$ 이지만 $A \neq B$

④ $A \subset B, B \subset C, C \subset A$ 이면, $A = B = C$

⑤ $A \subset B \subset C$ 이면, $n(A) \leq n(B) \leq n(C)$

12. $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 적어도 한 개의 홀수를 원소로 가지는 것의 개수를 구하여라.

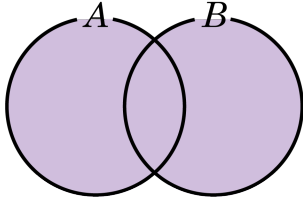
▶ 답 : 27 개

▷ 정답 : 27 개

해설

공집합과 짝수만을 원소로 가지는 부분집합은 제외한다... $2^5 - 2^2 - 1 = 27$ (개)

13. 두 집합 $A = \{1, 3, 5, 9, 15\}$, $B = \{3 \times x \mid x \in A\}$ 에 대하여 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합의 원소의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 105

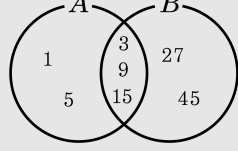
해설

$B = \{3 \times x \mid x \in A\}$ 는 집합 A 의 원소를 x 에 대입한 수들의 집합이다.

원소나열법으로 고쳐보면,

$B = \{3, 9, 15, 27, 45\}$ 이다.

벤 다이어그램을 그리면 다음과 같다.



색칠한 부분의 원소는 $\{1, 3, 5, 9, 15, 27, 45\}$ 이다.

따라서 모든 원소의 합은

$1 + 3 + 5 + 9 + 15 + 27 + 45 = 105$ 이다.

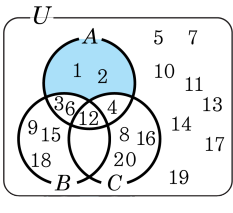
14. 전체집합 $U = \{x|x\text{는 } 20 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 세 부분집합 $A = \{x|x\text{는 } 12 \text{ 의 약수}\}$,
 $B = \{x|x\text{는 } 3 \text{ 의 배수}\}$,
 $C = \{x|x\text{는 } 4 \text{ 의 배수}\}$ 에 대하여 $(A - B) \cap C^C$ 을 원소나열법으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : {1,2}

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 18, 19, 20\}$,
 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $C = \{4, 8, 12, 16, 20\}$
 이므로 $(A - B) \cap C^C$ 을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.
 $\therefore (A - B) \cap C^C = \{1, 2\}$



15. 자연수 n 에 대하여 $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ 로 정의된다. 예를 들어, $1! = 1$, $2! = 2 \times 1$, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 이다. 전체집합 $U = \{x \mid x = n! \text{ (} n, x \text{는 자연수)}\}$ 에서 두 조건 p, q 가 각각 p : 일의 자리가 0인수, q : 자리수가 네 자리 이상인 수 일 때, 조건 ‘ p 이고 $\sim q$ ’를 만족하는 집합의 원소의 개수는?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

‘ p 이고 $\sim q$ ’ $\Rightarrow P \cap Q^c = P - Q$
i) 일의 자리가 0인 수 중 네자리 미만인 수의 일의 자리가 0이기 위해서는 인수로 2, 5를 가져야 한다.
 $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
ii) $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

16. 다음은 정수 a, b 에 대하여 명제 ‘ ab 가 짝수이면 a 또는 b 가 짝수이다.’를 증명한 것이다.

a, b 를 모두 홀수라 하면 $a = 2m - 1, b = 2n - 1$ (m, n 은 정수)로 나타낼 수 있으므로
 $ab = (2m - 1)(2n - 1) = 4mn - 2m - 2n + 1$
 $= 2(2mn - m - n) + 1$
이때, $2mn - m - n$ 이 ’ 이므로, ab 는 이다.
따라서, ‘ a, b 가 홀수이면 ab 는 홀수이다.’는 참이고 이것은 주어진 명제의 이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 과정에서 빈칸에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

- ① 자연수, 홀수, 역
- ② 정수, 짝수, 대우
- ③ 정수, 홀수, 대우
- ④ 유리수, 짝수, 이
- ⑤ 유리수, 홀수, 이

해설

a, b 를 모두 홀수라 하면
 $a = 2m - 1, b = 2n - 1$ (m, n 은 정수)로 나타낼 수 있으므로
 $ab = (2m - 1)(2n - 1) = 4mn - 2m - 2n + 1$
 $= 2(2mn - m - n) + 1$
이때, $2mn - m - n$ 이 이므로 ab 는 이다. 이것은 주어진 명제의 가 참임을 증명하여 주어진 명제가 참임을 증명한 것이다.

17. 다음은 “실수를 계수로 갖는 세 개의 이차방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$, $cx^2 + 2ax + b = 0$ 중 적어도 하나는 실근을 갖는다”는 것을 증명한 것이다. 위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 부등호를 차례대로 쓰면?

증명

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다고 가정하면
 $b^2 - ac \not\geq 0$, $c^2 - ab \not\geq 0$, $a^2 - bc \not\geq 0$
세 식을 같은 변끼리 더하면
 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \not\geq 0$
좌변을 변형하면
 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$
 $= \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \not\geq 0 \cdots \textcircled{가}$
그런데 a, b, c 는 실수이므로
 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \cdots \textcircled{나}$
따라서, $\textcircled{나}$ 은 $\textcircled{가}$ 에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

- ☒ ① <, <, ≥ ② <, <, > ③ <, >, <
④ ≥, ≥, ≤ ⑤ ≥, ≤, ≥

해설

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다면
 $b^2 - ac < 0$, $c^2 - ab < 0$, $a^2 - bc < 0$ (가정)
세 식을 같은 변끼리 더하면
 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac < 0$
좌변을 변형하면
 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$
 $= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} < 0 \cdots \textcircled{가}$
그런데 a, b, c 는 실수이므로
 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \cdots \textcircled{나}$
따라서, $\textcircled{나}$ 은 $\textcircled{가}$ 에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

18. x 의 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에 대해 $A = \{x \mid f(x) - g(x) = 0\}$, $B = \{x \mid f(x) = 0, g(x) = 0\}$, $C = \{x \mid \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = 0\}$ 일 때, 다음 중 세 집합 A , B , C 사이의 포함 관계로 옳은 것을 고르면?

- ① $A \subset B \subset C$ ② $A \subset C \subset B$ ③ $B \subset A \subset C$
 ④ $B \subset C \subset A$ ⑤ $C \subset B \subset A$

해설

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid f(x) - g(x) = 0\} = \{x \mid f(x) = g(x)\} \\ B &= \{x \mid f(x) = 0, g(x) = 0\} \\ &= \{x \mid f(x) = g(x) = 0\} \\ \therefore B &\subset A \quad \cdots \ominus \\ C &= \{x \mid \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = 0\} \\ &= \{x \mid f(x) = g(x) \text{ 또는 } f(x) = -g(x)\} \\ \therefore A &\subset C \quad \cdots \omin� \\ \omin�, \omin� &\text{에서 } B \subset A \subset C \end{aligned}$$

19. 유리수 전체의 집합을 Q 라 하고, 자연수 $n(n \geq 2)$ 에 대하여 집합 A_n 을 $A_n = \left\{ x \mid x - [x] = \frac{1}{n}, x \in Q \right\}$ 로 정의할 때, 다음 중에서 옳은 것은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수를 나타낸다.)

① $-\frac{4}{3} \in A_3$

② $A_2 \subset A_4$

③ $A_4 \subset A_2$

④ $A_2 \cap A_3 = \emptyset$

⑤ $A_5 = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{6}{5}, \frac{11}{5}, \dots, \frac{51}{5} \right\}$

해설

$[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수를 나타내므로 간단하게 정수라고 생각하면 되고, $x - [x]$ 는 x 의 소수 부분이다. 따라서

구하고자 하는 집합 A_n 의 원소 x 는 $x = [x] + \frac{1}{n}$ 이다.

$[x]$ 가 정수이므로 집합 A_n 은

$$A_n = \left\{ \dots, -2 + \frac{1}{n}, -1 + \frac{1}{n}, 0 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}, \dots \right\} \text{ 이 되고,}$$

n 대신에 2, 3, 4, 5, ...를 각각 대입해서 $A_2, A_3, A_4, A_5, \dots$ 를 구해 보면

$$A_2 = \left\{ \dots, -2 + \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{2}, 0 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}, \dots \right\}$$

$$= \left\{ \dots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \right\}$$

$$A_3 = \left\{ \dots, -2 + \frac{1}{3}, -1 + \frac{1}{3}, 0 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}, \dots \right\}$$

$$= \left\{ \dots, -\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \dots \right\}$$

$$A_4 = \left\{ \dots, -2 + \frac{1}{4}, -1 + \frac{1}{4}, 0 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

$$= \left\{ \dots, -\frac{7}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \dots \right\}$$

$$A_5 = \left\{ \dots, -2 + \frac{1}{5}, -1 + \frac{1}{5}, 0 + \frac{1}{5}, 1 + \frac{1}{5}, 2 + \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

$$= \left\{ \dots, -\frac{9}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{6}{5}, \frac{11}{5}, \dots \right\}$$

이므로 $A_2 \cap A_3 = \emptyset$ 임을 알 수 있다.

20. 집합 $P = \{2x+1|x \text{는 6보다 작은 자연수}\}$ 의 부분집합 $A = \{3, 5\}$, $B = \{5, 7, 9\}$ 에 대하여 $A \cup X = B \cup X$ 를 만족하는 집합 P 의 부분집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 4개

해설

$$P = \{2x + 1 | x \text{는 } 6 \text{보다 작은 자연수}\} = \{3, 5, 7, 9, 11\}$$
$$A = \{3, 5\}, B = \{5, 7, 9\}$$

$A \cup X = B \cup X$ 를 만족하는 X 는 원소 3, 7, 9를 반드시 포함하는 집합 P 의 부분집합이다.

따라서 부분집합 X 의 개수는 $2^{5-3} = 4$ (개)

21. 임의의 두 집합 X, Y 대하여
 $X \blacklozenge Y = (X \cup Y) \cap (X \cap Y)^c$ 라고 정의한다. 전체 집합 $U = \{x|x \leq 50, x \text{는 자연수}\}$ 의 세 부분집합 $A = \{x|x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 4 \text{의 배수}\}$, $C = \{x|x \text{는 } 16 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $A \blacklozenge (B \blacklozenge C)$ 의 원소의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$$X \blacklozenge Y = (X \cup Y) \cap (X \cap Y)^c = (X \cup Y) - (X \cap Y),$$

$$\begin{aligned} A &= \{x|x \text{는 } 3 \text{의 배수}\} \\ &= \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, \\ &\quad 42, 45, 48\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \{x|x \text{는 } 4 \text{의 배수}\} \\ &= \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \{x|x \text{는 } 6 \text{의 배수}\} \\ &= \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \blacklozenge (B \blacklozenge C) &= A \blacklozenge ((B \cup C) - (B \cap C)) \\ &= A \blacklozenge \{4, 6, 8, 16, 18, 20, 28, 30, 32, 40, 42, 44\} \\ &= \{3, 4, 8, 9, 12, 15, 16, 20, 21, 24, 27, 28, 32, \\ &\quad 33, 36, 39, 40, 44, 45, 48\} \end{aligned}$$

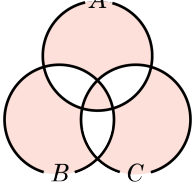
$$\therefore n(A \blacklozenge (B \blacklozenge C)) = 20$$

22. 임의의 두 집합 X, Y 에 대하여, 연산 Δ 을 $X\Delta Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$ 로 정의한다. 1에서 30까지의 정수 중 2의 배수, 3의 배수, 5의 배수의 집합을 차례로 A, B, C 라 할 때, $(A\Delta B)\Delta C$ 의 원소의 개수를 구하면?

- ① 10 개
- ② 13 개
- ③ 15 개
- ④ 17 개
- ⑤ 19 개

해설

$X\Delta Y = (X \cup Y) - (X \cap Y) = (X - Y) \cup (Y - X)$
 $(A\Delta B)\Delta C$ 의 벤다이어그램은 다음과 같다.
 $\therefore n((A\Delta B)\Delta C) = n(A) + n(B) + n(C) - 2[n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)] + 4n(A \cap B \cap C)$
 $= (15 + 10 + 6) - 2(5 + 2 + 3) + 4$
 $= 15(\text{개})$



23. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 의 두 부분집합 A, B 가 $A \cup B = U, A \cap B = \{3, 8\}$ 을 만족한다. A, B 의 원소의 합을 $N(A), N(B)$ 라고 할 때, $N(A) \times N(B)$ 의 최댓값은?

- ① 11^2 ② 22^2 ③ 23^2 ④ 33^2 ⑤ 44^2

해설

$$\begin{aligned} N(A) + N(B) &= N(U) + N(A \cap B) \\ &= (1 + 2 + 3 + \cdots + 9 + 10) + (3 + 8) = 66 \\ N(A) \times N(B) &= N(A) \cdot (66 - N(A)) \\ &= -N(A)^2 + 66N(A) \\ &= -(N(A) - 33)^2 + 33^2 \\ \therefore N(A) = 33 \text{ 일 때, 최댓값 } 33^2 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} N(A) + N(B) &= (1 + 2 + \cdots + 10) + (3 + 8) = 66 \\ N(A) > 0, N(B) > 0 \text{ 이므로} \\ \text{산술·기하 평균을 이용하면} \\ \frac{N(A) + N(B)}{2} &\geq \sqrt{N(A) \cdot N(B)} \quad (\text{단, 등호는 } N(A) = N(B) \text{ 일 때}) \\ \therefore N(A) \cdot N(B) &\leq 33^2 \\ \text{따라서 } N(A) + N(B) \text{의 최댓값은 } 33^2 \text{이다.} \end{aligned}$$

24. x, y 가 실수일 때, 다음 중 조건 p 가 조건 q 의 필요충분 조건인 것은?

- ① $p : x + y \geq 4, q : x \geq 2$ 또는 $y \geq 2$
- ② $p : x + y$ 는 유리수, $q : x, y$ 는 모두 유리수
- ③ $p : xy > x + y > 4, q : x > 2$ 이고 $y > 2$
- ④ $p : xy + 1 > x + y > 2, q : x > 1$ 이고 $y > 1$
- ⑤ $p : |x| > |y|, q : x > y$

해설

- ① 충분조건
- ② 필요조건
- ③ 필요조건
- ⑤ 아무 조건 아님

25. x, y, z 가 양의 실수일 때 $(x+y+z)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z}\right)$ 의 최솟값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 식을 전개하면

$$1 + \frac{x+y}{z} + \frac{z}{x+y} + 1$$

$$= 2 + \frac{x+y}{z} + \frac{z}{x+y} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{x+y}{z} \times \frac{z}{x+y}}$$

$$= 4$$