1. $(x-2y-3z)^2$ 을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면?

① $x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6zx$

② $x^2-4xy+4y^2-9z^2+12yz-6zx$

③ $x^2-(4y+6z)x+4y^2+12yz+9z^2$

④ $4y^2+12yz+9z^2+(-4y-6z)x+x^2$

⑤ $9z^2+4y^2+x^2$

해설

$(x-2y-3z)^2=x^2-(4y+6z)x+4y^2+12yz+9z^2$

2. 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 할 때, 나머지는?

① $f(2)$　② $f(-2)$　③ $f(2)+Q(2)$
④ $Q(2)$　⑤ $Q(-2)$

해설

$f(x)=(x-2)Q(x)+R$

$\therefore\ f(2)=R$

3. x 에 대한 다항식 $3x^3y+5y-xz+9xy-4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ 내림차순으로 정리하면 $3yx^3+(9y-z)x+5y-4$ 이다. ㉡ 오름차순으로 정리하면 $5y-4+(9y-z)x+3yx^3$ 이다. ㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3 차식이다. ㉣ x^3 의 계수는 3이다. ㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢
② ㉠, ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉡
④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.
㉤ 상수항은 $5y-4$ 이다.

4. 두 다항식 $A,\ B$에 대하여 연산 $A \ominus B$와 $A \otimes B$을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$A \ominus B = A - 3B,\ A \otimes B = (A+B)B$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3,\ Q = x^3 + x^2y + xy^2$이라 할 때, $(P \ominus Q) \otimes Q$를 x, y에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$ ② $x^4y^2 - xy^5$ ③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$ ⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$를 변형하면

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P - 3Q) \otimes Q \\ &= (P - 3Q + Q)Q \\ &= (P - 2Q)Q \quad \cdots \text{①}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P - 2Q \\ &= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

5. $(4x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 1) \div (x^2 - x + 1)$ 을 계산 하였을 때, 몫과 나머지의 합을 구하면?

① $4x^2 - 6x + 1$　② $4x^2 - 7x + 3$　③ $4x^2 - 4x + 5$

④ $4x^2 - 8x + 2$　⑤ $4x^2 - 6x + 7$

해설

직접 나누어서 구한다.

몫 : $4x^2 - x - 2$, 나머지 : $-5x + 3$

$\therefore$ 몫과 나머지의 합은 $4x^2 - 6x + 1$

6. 다항식 $f(x)$를 $2x^2+3x+2$로 나누었더니 몫이 $3x-4$이고, 나머지가 $2x+5$이었다. 이 때, $f(1)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$

$=6x^3+9x^2+6x-8x^2-12x-8+2x+5$

$=6x^3+x^2-4x-3$

$\therefore\ f(1)=6+1-4-3=0$

해설

$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$

$f(1)=(2+3+2)(3-4)+(2+5)=-7+7=0$

7. $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$일 때, $f(x)-2=x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$가 항상 성립하도록 하는 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)-2=x^3-3x^2+3x-1$이므로

$x^3-3x^2+3x-1=x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$

$=x^3+(-a+b)x^2+(a-1)x-b\cdots$㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로 양변의 차수가 같은 항의 계수가 같아야 한다.

즉, $-a+b=-3,\ a-1=3,\ b=1$

이므로 $a=4,\ b=1$

$\therefore\ a+b=5$

8. 등식 $2x^2-3x-2=a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$가 x값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x=0$을 대입하면

$-2=2a \quad \therefore \ a=-1$

양변에 $x=1$을 대입하면

$-3=-b \quad \therefore \ b=3$

양변에 $x=2$를 대입하면

$0=2c \quad \therefore c=0$

$\therefore \ a+b+c=2$

9. 다항식 $6x^3-7x^2+17x-3$을 $3x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $Q(1)+R$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$6x^3-7x^2+17x-3=(3x-2)Q(x)+R$

양변에 $x=1$을 대입하면, $13=Q(1)+R$

$\therefore\ Q(1)+R=13$

해설

$6x^3-7x^2+17x-3$를 $3x-2$로 직접 나누거나 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

10. x에 대한 다항식 $(4x^2-3x+1)^5$을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

① 0 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 1024

해설

$(4x^2-3x+1)^5$을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$(4x^2-3x+1)^5 = a_0x^{10}+a_1x^9+a_2x^8+\cdots+a_9x+a_{10}$과 같이 된다.
여기서 모든 계수들의 합
$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$을 구하려면
$x=1$을 대입하면 된다.
즉, $(4-3+1)^5 = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$
모든 계수들의 합은 $2^5=32$

11. $f(x)=x^2-ax+1$ 이 $x-1$ 로 나누어 떨어질 때 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a=2$

해설

$f(1)=1^2-a\cdot 1+1=0$

$\therefore\ a=2$

12. 두 다항식 $A=a+2b$, $B=2a+3b$일 때, $2A+B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A+B &= 2(a+2b)+(2a+3b) & \\ &= (2a+4b)+(2a+3b) & \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a+(4b+2a)+3b & \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a+(2a+4b)+3b & \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a+2a)+(4b+3b) & \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2+2)a+(4+3)b & \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a+7b & \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a+(2a+4b)+3b=(2a+2a)+(4b+3b)$: 결합법칙

13. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$일 때, $(x+1)(y+1)(z+1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(x+1)(y+1)(z+1)$

$=xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$

$=7$

14. 다음 식 중에서 옳지 않은 것을 고르면?

① $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

② $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

③ $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

④ $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑤ $(a^2+a+1)(a^2-a+1) = a^4-a^2+1$

해설

⑤ $(a^2+a+1)(a^2-a+1) = (a^2+1)^2-a^2$

$= a^4+a^2+1$

15.

세 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=\sqrt{6}$, $ab+bc+ca=2$일 때, $81(abc)^2$의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

16. $\dfrac{2x+3a}{4x+2}$가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, a의 값을 구하면? $\left(\text{단, } x \neq -\dfrac{1}{2}\right)$

① 1　　② $\dfrac{1}{2}$　　③ $\dfrac{1}{3}$　　④ $\dfrac{1}{4}$　　⑤ $\dfrac{1}{5}$

해설

$\dfrac{2x+3a}{4x+2} = k$ (일정)라 놓으면

$2x+3a = k(4x+2)$ 에서 $(2-4k)x + (3a-2k) = 0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$2-4k=0$, $3a-2k=0$

$\therefore\ k = \dfrac{1}{2}$ 이므로 $a = \dfrac{1}{3}$

17. $x-y=1$을 만족하는 임의의 실수 x, y에 대하여 $ax^2+bxy+cy^2-1=0$이 항상 성립할 때, $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y=x-1$을 준식에 대입하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$(a+b+c)x^2-(b+2c)x+c-1=0$

x에 대한 항등식이므로

$a+b+c=0,\ b+2c=0,\ c-1=0$

$\therefore\ a=1,\ b=-2,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=0$

18. 다항식 $f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지는 각각 1, 2이다. $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$일 때, $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는?

① $Q(3)+3$ ② $Q(3)+4$ ③ $2Q(3)+3$

④ $2Q(3)+4$ ⑤ $Q(3)$

해설

$f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 몫이 $Q(x)$일 때, 나머지를 $ax+b$라고 하면

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

$f(1)=1$에서 $a+b=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=2$에서 $2a+b=2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1$, $b=0$

$\therefore\ f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+x$

$f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는 $f(3)$이므로 $f(3)=2Q(3)+3$

19. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 3이고, $x+1$로 나눈 나머지가 -1일 때, $(x^2+x+2)f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

나머지 정리에 의해 $f(1)=3, f(-1)=-1$

$(x^2+x+2)f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$x=1, x=-1$ 을 대입한다.

$4f(1)=12=a+b\cdots$ ㉠

$2f(-1)=-2=-a+b\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면,

$a=7,\ b=5$

$\therefore$ 나머지 $R(x)=7x+5$

$R(1)=12$

20. 다항식 $f(x)$를 $x-3, x-4$로 나눈 나머지가 각각 $3, 2$이고, 다항식 $f(x+1)$을 x^2-5x+6으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(3)=3,\ f(4)=2$

$R(x)=ax+b$라 하면

$f(x+1)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$

$x=2$대입,

$f(3)=2a+b=3$

$x=3$대입,

$f(4)=3a+b=2$

$a=-1,\ b=5$

$R(x)=-x+5,$

$R(1)=-1+5=4$

21. 다항식 $f(x)$를 $x-2,\ x-3$ 으로 나눌 때의 나머지가 각각 $3, 7$이라고 할 때, $f(x)$를 $(x-2)(x-3)$으로 나눌 때의 나머지는?

① $2x+3$　　② $3x-4$　　③ $4x-5$

④ $5x+6$　　⑤ $6x-7$

해설

$f(x)=(x-2)\,Q_1(x)+3,\ f(2)=3$

$f(x)=(x-3)\,Q_2(x)+7,\ f(3)=7$

$f(x)=(x-2)(x-3)\,Q_3(x)+ax+b$

$f(2)=2a+b=3, f(3)=3a+b=7$ 이다.

연립하면 $a=4,\ b=-5$

$\therefore$ 나머지는 $4x-5$

22. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 5이고, $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -4이다. 이때, $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값은?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q_1(x)+5 \\ &= (x+2)Q_2(x)-4 \\ &= (x-1)(x+2)Q_3(x)+R(x) \end{aligned}$$

$R(x)=ax+b$ 라 하면

$f(1)=5$이므로

$R(1)=a+b=5 \cdots ①$

$f(-2)=-4$이므로

$R(-2)=-2a+b=-4 \cdots ②$

①, ②에 의해 $a=3,\ b=2$이다.

$\therefore\ R(x)=3x+2 \Rightarrow R(2)=8$

23. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때, 나머지가 3 이고, 다항식 $f(x+2)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $ax+4$ 이다. 이때, 상수 a 의 값을 구하는 과정을 나타낸 것이다. (　　　) 안에 알맞지 않은 것을 고르면?

> 풀이) $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 3 이므로 (ⓐ) 이다.
> $f(x+2)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면
> (ⓑ) $\cdots$ (㉠)
> (㉠)은 x 에 대한 항등식이므로 $x=-1$ 을 대입하면 (ⓒ) 이다.
> 따라서 (ⓓ) 에서 (ⓔ) 이다.

① ⓐ $f(1)=3$

② ⓑ $f(x+2)=(x+1)^2Q(x)+ax+4$

③ ⓒ $f(-1)=-a+4$

④ ⓓ $-a+4=3$

⑤ ⓔ $a=1$

해설

㉠에 $x=-1$ 를 대입하면 $f(1)=-a+4$

24. 다항식 $f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지는 각각 1, 2이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$일 때, $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는?

① $Q(3)+3$ ② $Q(3)+4$ ③ $2Q(3)+3$

④ $2Q(3)+4$ ⑤ $Q(3)$

해설

주어진 조건에서 $f(1)=1$, $f(2)=2$이다.

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$라 놓으면

$f(1)=a+b=1$, $f(2)=2a+b=2$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

즉 $f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+x$

$\therefore\ f(3)=2Q(3)+3$

25. x^5+x+1을 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 할 때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^5+x+1=(x+1)Q(x)+R$

$x=-1$을 양변에 대입하면 $R=-1$

$\therefore\ x^5+x+1=(x+1)Q(x)-1\cdots$㉠

$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $Q(1)$

㉠에 $x=1$을 대입하면 $3=2Q(1)-1$

$\therefore\ Q(1)=2$

26. 두 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=7$, $x+y=3$ 일 때, x^5+y^5의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 123

해설

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$에서 $3^2=7+2xy$, $xy=1$
$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$에서 $x^3+y^3=18$

$$\begin{aligned} x^5+y^5 &= (x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y) \\ &= 7\times 18-1^2\times 3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

27. $x^{113}+1$을 x^3+x로 나누었을 때, 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라고 하자. 이때, $R(2006)$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2007

해설

$$x^{113}+1 = (x^3+x)Q(x)+R(x)$$
$$= x(x^2+1)Q(x)+ax^2+bx+c$$

항등식이므로 $x=0, x^2=-1$을 각각 대입하면,

$1=c,\ x+1=-a+bx+c$

$\therefore a=0,\ b=1$

$\therefore R(x)=x+1$

따라서 $R(2006)=2007$

28. 다항식 $x^{51}+30$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. 이때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+R$ 이라 하면

$x=-1$을 대입하면 $R=29$

$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+29$

$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$Q(1)$, $x=1$식에 대입

$31=2Q(1)+29$

$\therefore\ Q(1)=1$

29. $f(x)$는 다항식으로 $\{f(x)\}^3$을 x^2으로 나누면 나머지는 $x+1$이라고 한다. $f(x)$를 x^2으로 나눌 때, 나머지는?

① $x+\frac{1}{3}$ ② $x+\frac{1}{2}$ ③ $\frac{x}{3}+1$ ④ $\frac{x}{2}+1$ ⑤ $\frac{x}{5}+1$

해설

$f(x)$를 x^2으로 나눈 몫을 $Q(x)$
나머지를 $ax+b$라 하면
$f(x)=x^2Q(x)+ax+b$

$\{f(x)\}^3=\{x^2Q(x)+ax+b\}^3$
이것을 $x^2P(x)+(ax+b)^3$이라 하면

$\{f(x)\}^3$을 x^2으로 나눈 나머지는
$(ax+b)^3$을 x^2으로 나눈 나머지와 같으므로
$(ax+b)^3=a^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3$에서
$3ab^2x+b^3=x+1$
$\therefore\ 3ab^2=1,\ b^3=1$

$\therefore\ a=\frac{1}{3},\ b=1$

$\therefore\ ax+b=\frac{x}{3}+1$

30. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 때, $f(x)$를 $(x+1)(x-1)^2$으로 나눌 때, 나머지를 ax^2+bx+c라 하면 $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 4이므로
$f(-1)=4$
$f(x)=(x-1)^2Q(x)\cdots$㉠
$f(x)=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+ax^2+bx+c$
$\quad\;=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+a(x-1)^2$ ($\because$ ㉠)
양변에 $x=-1$를 대입하면
$f(-1)=4a=4 \therefore a=1$
$ax^2+bx+c=a(x-1)^2=x^2-2x+1$
$\therefore\; b=-2, c=1$
$\therefore\; a+b+c=0$

해설

ax^2+bx+c를 구하는 것이 아니라 $a+b+c$를 통째로 구할 때는 다음과 같이 풀 수 있다.
$f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누어 떨어지므로 $f(1)=0$
$f(x)=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+ax^2+bx+c$
양변에 $x=1$를 대입하면
$f(1)=0+(a+b+c)=0$
$\therefore a+b+c=0$