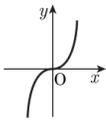
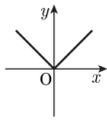


1. 다음 중 함수의 그래프가 아닌 것은?

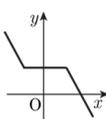
①



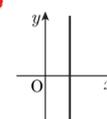
②



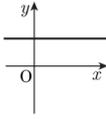
③



④



⑤



해설

함수가 되기 위한 2가지 조건

(i) 정의역에 있는 모든 원소가 빠짐없이 공역에 있는 원소에 대응되어야 한다.

(ii) 정의역에 있는 각각의 원소가 공역의 오직 하나의 원소에 대응되어야 한다.

④ : x 의 한 값 x_1 에 y 의 값이 무수히 많이 대응되고 있으므로 함수가 될 수 없다.

2. 두 집합 $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 가 $f(x) = 2x^2 - 3x$ 일 때, 함수 f 의 치역을 구하면?

① $\{-1, 1\}$

② $\{-1, 0, 1\}$

③ $\{0, 1, 2\}$

④ $\{-1, 0, 2\}$

⑤ $\{-1, 0, 1, 2\}$

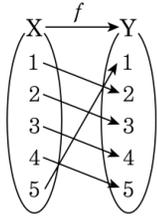
해설

$$f(x) = 2x^2 - 3x \text{이므로}$$

$$f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = 2$$

따라서 치역은 $\{-1, 0, 2\}$

3. 다음 그림과 같이 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고, 함수 $f : X \rightarrow X$ 에 대하여 $(f \circ f)(a) = 3$ 이 되는 a 의 값은?



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(f(a)) = 3$ 이므로 $f(a) = 2$
 $\therefore a = 1$

4. 함수 $y = -x - 1$ 의 역함수의 그래프에서 x 절편을 a , y 절편을 b 라 할 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y = -x - 1$ 에서 $x = -y - 1$
여기서 x 와 y 를 바꾸면 역함수는 $y = -x - 1$
따라서 x 절편 $a = -1$, y 절편 $b = -1$ 이므로
 $ab = 1$

5. 함수 $f(x) = 2ax - a + 2$ 에 대하여 $f^{-1}(-7) = 2$ 일 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

- ① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$$f^{-1}(-7) = 2 \text{ 이므로}$$

역함수의 정의에 의해서

$$f(2) = -7, f(2) = 2a \times 2 - a + 2 = -7, 3a = -9$$

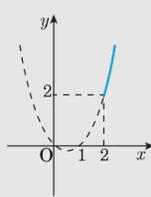
$$\therefore a = -3$$

6. 이차함수 $f(x) = x^2 - x$ 가 있다. 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 는 $X = \{x | x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은 얼마인가?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

주어진 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이려면,
 (정의역)=(공역)이므로
 (정의역)=(치역)이 되어야 한다.
 즉, $f(k) = k$
 $\therefore k = 0$ 또는 $k = 2$
 (i) $k = 0$ 이면 $f(0) = f(1)$ 이므로
 $f(x) = x^2 - x$ 가 일대일대응이 되지 않는다.
 (ii) $k = 2$ 이면 일대일대응이 된다.
 $\therefore k = 2$



7. 다음 보기의 함수 중 일대일 대응인 것은 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = 2x + 1$

㉡ $g(x) = x^2$

㉢ $h(x) = -x$

㉣ $k(x) = |x|$

- ① 4개 ② 3개 ③ 2개 ④ 1개 ⑤ 없다

해설

이 문제는 그래프를 그려서 판단하는 것이 좋다.
하나의 요령은 어떤 함수가 일대일 대응일 경우는
그래프를 그려보면 오직 증가만 하든지
또는 감소만 하는 형태의 그래프가 나타난다.
일대일 대응은 뒤에 역함수에서 활용된다.
(즉, 역함수가 존재하는 함수는 일대일 대응뿐이다.)
㉠은 증가만 하는 일대일 대응,
㉢은 감소만 하는 일대일 대응.
답은 2개

8. 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f^{-1}(1) = 2$, $f(1) = 2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f(2) = 2a + b = 1, \quad f(1) = a + b = 2$$

$$\text{연립하면 } a = -1, \quad b = 3$$

$$\therefore f(3) = 3a + b = 0$$

9. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f(5) = -2$, $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f^{-1}(5)$ 의 값은?

① -5 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 5

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$
따라서 $f^{-1}(5) = f(5) = -2$

10. 함수 $y = |x - 3| - 1$ 에 대하여 $0 \leq x \leq 4$ 일 때, 이 함수의 최댓값과 최솟값을 차례대로 구하면?

- ① 2, 1 ② 2, 0 ③ 2, -1
④ 1, -1 ⑤ 1, -2

해설

$0 \leq x \leq 4$ 에서

$$y = |x - 3| - 1$$

$$= \begin{cases} x - 4 & (3 \leq x \leq 4) \\ -x + 2 & (0 \leq x < 3) \end{cases}$$

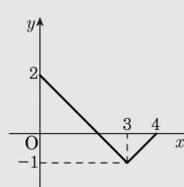
따라서, 위 함수의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$x = 0$ 일 때

최댓값은 2 이고

$x = 3$ 일 때

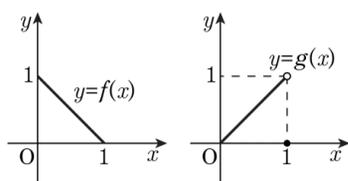
최솟값은 -1 이다.



11. 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다음 성질을 만족시킨다.

- I. $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 주기가 2인 주기함수이다.
 II. 임의의 실수 x 에 대하여
 $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$

함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프의 일부가 각각 다음과 같을 때,
 $f\left(g\left(-\frac{7}{3}\right)\right)$ 의 값을 구하면?



- ① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

II. 에 의하여
 $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이고,
 $y = g(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$$g\left(-\frac{7}{3}\right) = -g\left(\frac{7}{3}\right) = -g\left(2 + \frac{1}{3}\right) \\ = -g\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

($\because -1 < x < 1$ 에서 $g(x) = x$) 이고
 $0 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) = -x + 1$

$$\text{따라서 } f\left(g\left(-\frac{7}{3}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right) \\ = -\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{2}{3}$$

12. $(x+y):(y+z):(z+x) = 6:7:5$ 일 때, $\frac{x^2-yz}{x^2+y^2}$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{4}{13}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{4}{13}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$$\begin{cases} x+y=6k \cdots \text{㉠} \\ y+z=7k \cdots \text{㉡} \quad (\text{단, } k \neq 0) \\ z+x=5k \cdots \text{㉢} \end{cases}$$

$$\text{㉠} + \text{㉡} + \text{㉢} \text{를 해 주면 } 2(x+y+z) = 18k$$

$$\therefore x+y+z = 9k$$

$$\therefore x = 2k, y = 4k, z = 3k$$

$$\therefore \frac{x^2-yz}{x^2+y^2} = \frac{4k^2-12k^2}{4k^2+16k^2} = \frac{-8}{20} = -\frac{2}{5}$$

13. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2(x \geq 1) \\ 1(x < 1) \end{cases}$ 에서 $y = (f \circ f)(x)$ 의 식을 구하여라.

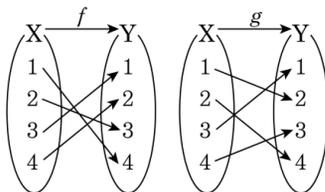
▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

i) $x \geq 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 2$
ii) $x < 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 2$
 $\therefore y = (f \circ f)(x) = 2$

14. 두 함수 f, g 가 아래 그림과 같이 정의될 때, $g = h \cdot f$ 를 만족시키는 함수 h 에 대하여 $h(2)$ 의 값은?



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$g = h \cdot f$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$$\begin{aligned} \therefore g \cdot f^{-1} &= (h \cdot f) \cdot f^{-1} = h \cdot (f \cdot f^{-1}) \\ &= h \cdot I = h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore h(2) &= (g \cdot f^{-1})(2) \\ &= g(f^{-1}(2)) \\ &= g(4) (\because f^{-1}(2) = 4) \\ \therefore g(4) &= 3 \end{aligned}$$

15. 두 집합 $X = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$,
 $Y = \{y \mid 2 \leq y \leq 9\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 를 $f(x) = ax^2 + b$ 로
정의한다. 이 때 $f^{-1}(x)$ 가 존재하도록 상수 a, b 를 정할 때, $a + b$ 의
값은? (단, $a < 0$)

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

역함수가 존재하기 위해서는 일대일 대응이어야한다.

$a < 0$ 이므로 $f(x) = ax^2 + b$ 는 x 가 증가할 때

$f(x)$ 는 감소하고 $f(1) = 9, f(2) = 2$ 이다.

$$\begin{cases} a + b = 9 & \cdots \text{㉠} \\ 4a + b = 2 & \cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠, ㉡을 연립하면

$$a = -\frac{7}{3}, b = \frac{34}{3}$$

$$\therefore a + b = 9$$

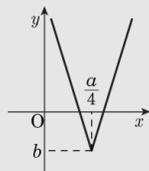
16. 함수 $f(x) = |4x - a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때 최솟값 -2 를 가진다. 이 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x - a| + b = \left| 4\left(x - \frac{a}{4}\right) \right| + b$ 의 그래프는 $y = |4x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서, $x = \frac{a}{4}$ 일 때 최솟값 b 를 가지므로

$$\frac{a}{4} = 3, b = -2$$

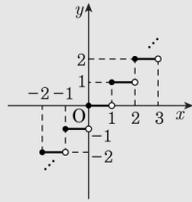
$$\therefore a = 12, b = -2 \quad \therefore a + b = 10$$

17. 다음 중 옳지 않은 것을 고르면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

- ① $y = [x]$ 의 그래프는 함수의 그래프이다.
- ② $y = [x]$ 의 정의역이 모든 실수일 때, 치역은 정수 전체의 집합이다.
- ③ $x = 2.1$ 이면 $[x] = 2$ 이다.
- ④ $x = -1.8$ 이면 $[x] = -2$ 이다.
- ⑤ $y = [x]$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

해설

$y = [x]$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로



$y = [x]$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이 아니다.

18. 분수식 $\frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-2} + \frac{x+10}{x^2-4}$ 를 간단히 하면?

- ① $\frac{1}{x-2}$ ② $\frac{1}{x+2}$ ③ $\frac{4}{x-2}$ ④ $\frac{4}{x+2}$ ⑤ $\frac{4x}{x-2}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-2} + \frac{x+10}{x^2-4} \\ &= \frac{2x-4+x+2+x+10}{x^2-4} \\ &= \frac{4x+8}{x^2-4} \\ &= \frac{4}{x-2} \end{aligned}$$

19. $\frac{1 + \frac{1}{x-1}}{1 - \frac{1}{x+1}} = a + \frac{b}{x-1}$ 이라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

좌변을 정리하여 우변과 비교한다.

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{1}{x-1}}{1 - \frac{1}{x+1}} &= \frac{\frac{x-1+1}{x-1}}{\frac{x+1-1}{x+1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x+1}} \\ &= \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x-1} \end{aligned}$$

$$a + \frac{b}{x-1} = \frac{ax - a + b}{x-1}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{ax - a + b}{x-1}$$

$$\therefore a = 1, b = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5$$

20. 등식 $\frac{225}{157} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}}$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e

를 차례대로 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 1$

▷ 정답: $b = 2$

▷ 정답: $c = 3$

▷ 정답: $d = 4$

▷ 정답: $e = 5$

해설

$$\begin{aligned} \frac{225}{157} &= 1 + \frac{68}{157} = 1 + \frac{1}{\frac{157}{68}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{21}{68}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{21}}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}} \\ \therefore a &= 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5 \end{aligned}$$

21. $x + \frac{1}{x} = 2$ 일 때, $x^2 - \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = 2^2 - 4 = 0$$

$$\therefore x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 \times 2 = 0$$

22. 0이 아닌 실수 x, y, z 에 대하여 등식 $2x - 6y + 4z = 0, 3x + y - 2z = 0$ 이 성립한다. 이때, $\frac{x^2 + y^2}{xy + y^2}$ 의 값은?

- ① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

해설

두 식을 연립하여 풀면 $2x = y$ 가 나온다.

$$\frac{x^2 + y^2}{xy + y^2} = \frac{x^2 + 4x^2}{2x^2 + 4x^2} = \frac{5x^2}{6x^2} = \frac{5}{6}$$

23. $\frac{a+b}{5} = \frac{2b+c}{4} = \frac{c}{3} = \frac{2a+8b-c}{x}$ 에서 x 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: $x = 10$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{5} &= \frac{2b+c}{4} = \frac{c}{3} \\ &= \frac{2(a+b) + 3(2b+c) - 4c}{2 \times 5 + 3 \times 4 + (-4) \times 3} \\ &= \frac{2a+8b-c}{10}\end{aligned}$$

$$\therefore x = 10$$

24. $a : b = c : d$ 일 때 다음 등식 중 성립하지 않는 것은?(단, 분모는 모두 0 이 아니다.)

① $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$
 ③ $\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$
 ⑤ $\frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$

② $\frac{a+d}{a-d} = \frac{b+c}{b-c}$
 ④ $\frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

해설

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 에서}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 하면

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ 에서}$$

$$\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d} \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d} \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4} \div \textcircled{3}$ 하면

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 에서 가비의 리를 이용하면

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\therefore \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

25. 어떤 시험에서 수험생의 남녀 학생의 비는 3 : 2이고 합격자의 남녀 학생의 비는 6 : 5, 불합격자의 남녀 학생의 비는 12 : 7이었다. 남학생의 합격률을 구하면?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

	수험자	합격자	불합격자
남학생	$3k$	$6m$	$12n$
여학생	$2k$	$5m$	$7n$

$$3k = 6m + 12n \cdots \text{㉠}$$

$$2k = 5m + 7n \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠} \times 7 - \text{㉡} \times 12 \text{에서 } -3k = -18m$$

$$\therefore \frac{m}{k} = \frac{1}{6}$$

$$(\text{남학생의 합격률}) = \frac{6m}{3k} = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$