1. 연립부등식 $\begin{cases} 1 < x + 5y < 5 \\ -2 < 2x + 7y < 3 \end{cases}$ 을 성립시키는 정수로 이루어진 순서쌍 $(x,\ y)$중 $x+y$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$이라 할 때, $M+2m$의 값을 구하면?

① -9　② -13　③ -18　④ -22　⑤ -26

해설

$1 < x + 5y < 5 \cdots\cdots$ ㉠
$-2 < 2x + 7y < 3 \cdots\cdots$ ㉡
㉠ $\times (-2) +$ ㉡을 하면
$-10 < -2x - 10y < -2 \cdots\cdots$ ㉢
$-2 < 2x + 7y < 3 \cdots\cdots$ ㉣
㉢ $+$ ㉣ $= -12 < -3 < 1$
그러므로, $-\frac{1}{3} < y < 4$
그런데, y는 정수이므로 $y = 0,\ 1,\ 2,\ 3$
이것을 ㉠, ㉡에 대입하여 적합한 x의 값을 구하면
$(x,\ y) = (-3,\ 1),\ (-6,\ 2),\ (-7,\ 2),\ (-11,\ 3)$
따라서, $x+y$의 최댓값은$-3+1=-2$이고,
최솟값은$-11+3=-8$이다.
$\therefore M=-2,\ m=-8\ \ \therefore\ M+2m=-18$

2. 연립부등식 $\begin{cases} 2x+3>-3+x \\ 5x+1 \le 3x-1 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-6 < x \le -1$

해설

$\begin{cases} 2x+3>-3+x \\ 5x+1 \le 3x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-6 \\ x \le -1 \end{cases}$

$\therefore -6 < x \le -1$

3. 연립부등식 $\begin{cases} 5(x-9) < 4x-7 \\ 4x-7 \le 5(x-8) \end{cases}$ 을 만족하는 해집합 중에서 가장 작은 정수는?

① 33 ② 34 ③ 35 ④ 36 ⑤ 37

해설

$5x-45 < 4x-7$, $x < 38$
$4x-7 \le 5x-40$, $33 \le x$
$\therefore\ 33 \le x < 38$

4. 연립부등식 $\begin{cases} 0.7x - 1.2 \le 0.5x + 0.4 \\ \dfrac{x+2}{3} < 3 \end{cases}$ 을 만족하는 가장 큰 정수는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\begin{cases} 0.7x - 1.2 \le 0.5x + 0.4 \\ \dfrac{x+2}{3} < 3 \end{cases}$ $\rightarrow \begin{cases} 7x - 12 \le 5x + 4 \\ x + 2 < 9 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x \le 8 \\ x < 7 \end{cases}$

$\therefore x < 7$

따라서 가장 작은 정수는 6 이다.

5. 다음 조건을 동시에 만족하는 x 의 범위는?

(가) $2x - y = -5$
(나) $-x < 2y < 3(x+6)$

① $x > 8$　② $x < -2$　③ $-8 < x < -2$
④ $-2 < x < 8$　⑤ $-8 < x < 2$

해설

$2x - y = -5 \Rightarrow y = 2x + 5$를 부등식에 대입하면,
$-x < 2(2x+5) < 3(x+6)$

$$\begin{cases} -x < 2(2x+5) \\ 2(2x+5) < 3(x+6) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x < 4x + 10 \\ 4x + 10 < 3x + 18 \end{cases}$$

정리하면 $\begin{cases} x > -2 \\ x < 8 \end{cases}$ 이므로 $-2 < x < 8$ 이다.

6. 다음 두 일차부등식을 만족하는 정수는 모두 몇 개인지 구하여라.

$$\frac{x-2}{3}+1 \le -\frac{x}{3}+\frac{3}{2}, \quad 0.2-0.1x > 1-0.5x$$

▶ 답 : ＿＿＿＿＿개

▷ 정답 : 0개

해설

$\frac{x-2}{3}+1 \le -\frac{x}{3}+\frac{3}{2}$

양변에 6 을 곱하면

$2(x-2)+6 \le -2x+9$

$4x \le 9-2$

$x \le \frac{7}{4}$

$0.2-0.1x > 1-0.5x$

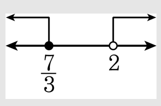
양변에 10 을 곱하면

$2-x > 10-5x$

$-x+5x > 10-2$

$4x > 8$

$x > 2$



∴ 해가 없다.

7. 연립부등식 $\begin{cases} x-4>-5 \\ 1+3x<a \end{cases}$ 의 해가 $-1<x<2$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$x-4>-5 \Rightarrow x>-1$

$1+3x<a$

$3x<a-1$

$x<\dfrac{a-1}{3}$

$\dfrac{a-1}{3}=2,\ a-1=6$

$\therefore\ a=7$

8. 연립부등식 $\begin{cases} 1-3x \geq -5 \\ 4x-a > 2(x-2) \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a \geq 8$ ② $a < 4$ ③ $\frac{1}{2} \leq a < 2$
④ $4 \leq a < 8$ ⑤ $-4 \leq a < 8$

해설

$1-3x \geq -5,\ 2 \geq x$

$4x-a > 2(x-2),\quad x > \frac{a-4}{2}$

해가 없으므로 $\frac{a-4}{2} \geq 2,\quad a \geq 8$

9. 연속하는 세 자연수의 합이 69 보다 크고 72 이하일 때, 세 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

▷ 정답 : 24

▷ 정답 : 25

해설

세 자연수를 $x-1$, x , $x+1$ 이라하면

$69 < x-1+x+x+1 \le 72$

$69 < 3x \le 72$

$23 < x \le 24$

$\therefore \; x = 24$

따라서 연속하는 세 자연수는 23, 24, 25 이다.

10. 200 원짜리 자두와 500 원짜리 복숭아를 합하여 9 개를 사는데, 그 값이 2800 원 이상 3600 원 이하가 되게 하려고 한다. 복숭아는 최대 몇 개까지 살 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 6 개

해설

자두의 개수 : $(9-x)$ 개, 복숭아의 개수 : x 개

$2800 \le 200(9-x)+500x \le 3600$

$$\begin{cases} 2800 \le 200(9-x)+500x \\ 200(9-x)+500x \le 3600 \end{cases}$$

$\therefore \ \frac{10}{3} \le x \le 6$

따라서 살 수 있는 복숭아의 최대 개수는 6 개이다.

11. 어떤 직사각형의 세로의 길이가 가로의 길이에서 1cm 을 더한 후 2 배한 것과 같다고 한다. 이 직사각형의 둘레의 길이가 20cm 이상 35 cm 미만이고, 가로의 길이를 $x$cm 라 할 때, x의 범위로 옳은 것은?

① $\frac{8}{3} \le x \le \frac{31}{6}$　② $\frac{8}{3} < x \le \frac{31}{6}$　③ $\frac{8}{3} < x < \frac{31}{6}$
④ $\frac{8}{3} \le x < \frac{31}{6}$　⑤ $\frac{8}{3} \le x$

해설

가로의 길이를 $x$cm라고 하면 세로의 길이를 $2(x+1)$ cm이다. 이러한 직사각형의 둘레의 길이를 식으로 나타내면 $2x+2\times2(x+1)$ 이고, 정리하면 $6x+4$ 이다. 둘레의 길이가 20cm 이상 35cm 미만을 식으로 표현하면, $20 \le 6x+4 < 35$ 이므로 이를 연립 부등식으로 바꾸면 $\begin{cases} 20 \le 6x+4 \\ 6x+4 < 35 \end{cases}$ 이고 정리하면 $\begin{cases} x \ge \frac{8}{3} \\ x < \frac{31}{6} \end{cases}$ 이다.

따라서 가로의 길이의 범위는 $\frac{8}{3} \le x < \frac{31}{6}$ 이다.

12. 사탕을 포장하는데 한 박스에 4 개씩 넣으면 12 개가 남고, 6 개씩 넣으면 3 개이상 5 개 미만이 남는다고 한다. 전체 사탕의 개수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 28 개

해설

묶음의 수를 x묶음이라 하면

사탕의 수 : $(4x + 12)$ 개

$6x + 3 \le 4x + 12 < 6x + 5$

$$\begin{cases} 6x + 3 \le 4x + 12 \\ 4x + 12 < 6x + 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x \le 9 \\ -2x < -7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \le \frac{9}{2} \\ x > \frac{7}{2} \end{cases}$$

$\frac{7}{2} < x \le \frac{9}{2}$ 에서 x는 자연수이어야 하므로 $x = 4$

$\therefore$ 사탕의 수는 $4 \times 4 + 12 = 28$ (개) 이다.

13. 여러 개의 4g 짜리 추 A 와 6g 짜리 추 B 의 무게의 합은 0.1kg 이다. A 의 개수는 B 의 개수보다 많고, B 의 개수의 2 배보다는 적을 때, 두 추의 개수의 합을 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 21 개

해설

6g 짜리 추 B 의 개수가 b 개 있다고 하면

4g 짜리 추 A 는 $\frac{100-6b}{4}$ 개 있다.

따라서 $b < \frac{100-6b}{4} < 2b$ 에서

$\frac{50}{7} < b < 10$

$\therefore\ b = 8,\ 9$

추 A 의 개수인 $\frac{100-6b}{4}$ 가 자연수일 경우는 $b = 8$ 일 때이다.

따라서 추 A 의 개수는 13 개, 추 B 의 개수는 8 개

두 추의 개수의 합은 $13 + 8 = 21$ (개)

14. 부등식 $a(x^2-2x+1)>2(x^2-2x-2)$를 만족하는 실수 x가 존재할 때, 상수 a의 범위는?

① $a>2$ ② $a\geq 2$ ③ $a<2$

④ a는 모든 실수 ⑤ $a<\pm 2$

해설

$a=2$일 때, $6>0$이므로 x는 모든 실수

$a\neq 2$일 때,

$(a-2)x^2-2(a-2)x+a+4=0\cdots$ ㉠에서

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a-2)(a+4)=-6(a-2)$이므로

i) $a>2$이면, x는 모든 실수

ii) $a<2$이면, $\frac{D}{4}>0$이므로 ㉠의 근을

$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$라 하면

부등식의 해는 $\alpha<x<\beta$이므로 x값이 존재한다.

$\therefore$ a는 모든 실수

15. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2 + 2ax - 4 \geq 0$이 성립하지 않을 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $-4 \leq a \leq 0$　　② $0 \leq a < 1$ 또는 $a > 3$

③ $-4 < a$　　④ $-4 < a \leq 0$

⑤ $0 \leq a \leq 4$

해설

모든 실수 x에 대해 주어진 식이 성립하지 않으려면
$a \leq 0$이고 $D/4 = a^2 + 4a < 0$이어야 한다.
따라서 $a(a+4) < 0$이므로 $-4 < a < 0$이고
$a = 0$일 때도 성립하지 않으므로 $-4 < a \leq 0$

16. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $kx^2-2(k-4)x+2 \geq 0$이 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k \leq -2$　　② $-1 \leq k \leq 2$　　③ $1 \leq k \leq 8$

④ $2 \leq k \leq 8$　　⑤ $k \leq 8$

해설

x^2의 계수가 미지수 k이므로

ⅰ) $k=0$일 때 $8x+2 \geq 0$에서 $x \geq -\frac{1}{4}$이므로

모든 실수 x에 대하여 성립하는 것은 아니다.

ⅱ) $k \neq 0$일 때 $kx^2-2(k-4)x+2 \geq 0$의 해가 모든 실수이려면

$k > 0 \cdots$ ㉠

$\frac{D}{4}=(k-4)^2-2k \leq 0,\ k^2-10k+16 \leq 0,$

$(k-2)(k-8) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq x \leq 8 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2 \leq k \leq 8$

ⅰ), ⅱ)에서 $2 \leq k \leq 8$이다.

17. x에 대한 부등식 $(k+1)x^2-2(k+1)x+2>0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때, 실수 k값의 범위는?

① $-1<k<1$　② $-1<k\le 1$　③ $-1\le k<1$
④ $-1\le k\le 1$　⑤ $k\ge -1$

해설

ⅰ) $k=-1$일 때, $0\cdot x^2-0\cdot x+2>0$이므로
모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.
ⅱ) $k\ne -1$일 때, $(k+1)x^2-2(k+1)x+2>0$
이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면
$k+1>0,\ k>-1\cdots$ ㉠
또 이차방정식 $(k+1)x^2-2(k+1)x+2=0$의 판별식을 D라 할 때,
$$\frac{D}{4}=(k+1)^2-2(k+1)<0$$
$k^2-1<0,\ (k+1)(k-1)<0$
$\therefore -1<k<1\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-1<k<1$
ⅰ), ⅱ)에서 $-1\le k<1$

18. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 일 때, 이차부등식 $4cx^2-2bx+a<0$ 의 해는?

① $x<-7$ 또는 $x>-5$ ② $-7<x<-5$

③ $-7<x<5$ ④ $5<x<7$

⑤ $x<5$ 또는 $x>7$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 이므로

$(14x-1)(10x-1)<0,\ 140x^2-24x+1<0$

$-140x^2+24x-1>0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c>0$

$\therefore a=-140, b=24, c=-1 \cdots$ ㈎

㈎를 $4cx^2-2bx+a<0$ 에 대입하면

$-4x^2-48x-140<0$

$x^2+12x+35>0,\ (x+7)(x+5)>0$

$\therefore x<-7$ 또는 $x>-5$

19. 이차부등식 $ax^2 + bx + 3 < 0$ 의 해가 $x < -1$ 또는 $x > 3$ 일 때, $-x^2 + bx + a \geq 0$ 의 해가 될 수 있는 것은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

해가 $x < -1$ 또는 $x > 3$ 이므로 a 는 0 보다 작다

$ax^2 + bx + 3 < 0 \Leftrightarrow a(x+1)(x-3) > 0$

$ax^2 - 2ax - 3a > 0$

$\therefore \quad a = -1, \quad b = 2$

$-x^2 + bx + a \geq 0$에 대입하면

$x^2 - 2x + 1 \leq 0$

$(x-1)^2 \leq 0$

$\therefore \quad x = 1$

20. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2일 때, 방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=2$
$f(2x-3)=0$에서 $2x-3=\alpha$, $2x-3=\beta$
$\therefore\ x=\dfrac{\alpha+3}{2},\ \dfrac{\beta+3}{2}$
$\therefore$ 두 근의 합은 $\dfrac{(\alpha+\beta)+6}{2}=4$

21. 이차방정식 $x^2-(2k+4)x+2k^2+9=0$이 실근을 갖도록 k의 값 또는 범위를 정하면?

① $k<2$

② $k\le 2$

③ $k=2$를 제외한 모든 실수

④ $-4\le k\le 5$

⑤ k의 값은 존재하지 않는다.

해설

실근을 가지려면 판별식이 0보다 크거나 같아야 하므로

$(k+2)^2-(2k^2+9)\ge 0$

$k^2-4k+5\le 0$

그런데 $k^2-4k+5=(k-2)^2+1>0$

$\therefore$ k의 값은 존재하지 않는다

22. $2x-1>0$, $x^2-3x-4<0$를 동시에 만족하는 x 중에서 정수인 것의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

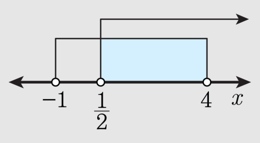
해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$(x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4$ $\cdots\cdots$ ㉡



㉠, ㉡의 공통 부분은

$\therefore \frac{1}{2}<x<4$

따라서 x 중에서

정수인 것은 1, 2, 3의 3개다.

23. x에 관한 방정식 $x^2-2kx+(k^2-k)=0$이 실근 α, β를 갖고 $(\alpha-\beta)^2 \le 16$이 성립하기 위한 실수 k의 범위를 구하면?

① $-1 \le k \le 4$ ② $-1 \le k \le 5$ ③ $0 \le k \le 4$
④ $0 \le k \le 5$ ⑤ $-2 \le k \le 2$

해설

i) 실근을 가지므로
$D \ge 0$에서 $k \ge 0 \cdots$①
ii) $(\alpha-\beta)^2 \le 16$에서
$(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \le 16$
$(2k)^2 - 4(k^2-k) \le 16$
$\therefore\ k \le 4 \cdots\cdots$②
$\therefore$ ①, ②에서 $0 \le k \le 4$

24. 이차방정식 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$의 두 근이 모두 1보다 클 때 실수 a의 값의 범위는?

① $0 \le a < 1$　　② $1 \le a < 2$　　③ $2 \le a < 3$

④ $3 \le a < 4$　　⑤ $4 \le a < 5$

해설

$f(x) = x^2 - 2ax + a + 2 = (x-a)^2 - a^2 + a + 2$

ⅰ) $D/4 = a^2 - a - 2 \ge 0,\quad a \le -1 \ or \ a \ge 2$

ⅱ) $f(1) = 1 - 2a + a + 2 > 0 \quad \therefore a < 3$

ⅲ) 대칭축 $x = a > 1$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 $2 \le a < 3$

25. 이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$의 두 근이 -1과 2 사이에 있도록 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a > 2$ 또는 $a < -2$ ② $2 < a < \frac{5}{2}$
③ $-2 < a < 4$ ④ $-2 < a < \frac{5}{2}$
⑤ $a > \frac{5}{2}$ 또는 $a < -2$

해설

(i) 방정식이 두 근을 가지므로
$D > 0$에서 $D = a^2 - 4 > 0,\ (a-2)(a+2) > 0$
$\therefore\ a > 2$ 또는 $a < -2$
(ii) $f(-1) > 0$에서 $1 + a + 1 > 0$
$\therefore\ a > -2$
(iii) $f(2) > 0$ 에서 $4 - 2a + 1 > 0$
$\therefore\ \frac{5}{2} > a$
(iv) 대칭축이 -1과 2 사이에 있어야 하므로
$-1 < \frac{a}{2} < 2$
$\therefore\ -2 < a < 4$
따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서 $2 < a < \frac{5}{2}$