1. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 10일 때, 방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=10$

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$로 놓으면

$f(4x-3)=a(4x-3-\alpha)(4x-3-\beta)=0$

$x=\dfrac{3+\alpha}{4},\quad \dfrac{3+\beta}{4}$

$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{6+\alpha+\beta}{4}=4$

2. 연립부등식

$$\begin{cases} x^2 \le 3x \\ x^2 + x \ge 2 \end{cases}$$ 의 해가 부등식

$ax^2 + 2bx - 6 \ge 0$ 의 해와 같을 때, ab 의 값을 구하면?

① 8　② 4　③ 2　④ -4　⑤ -8

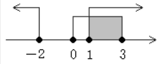
해설

$x^2 - 3x \le 0$, $x(x-3) \le 0$

$0 \le x \le 3$

$x^2 + x - 2 \ge 0$, $(x+2)(x-1) \ge 0$

$x \le -2, x \ge 1$



$(x-1)(x-3) \le 0$, $x^2 - 4x + 3 \le 0$

$\rightarrow -2x^2 + 8x - 6 \ge 0$

$a = -2, b = 4$

$\therefore ab = -8$

3. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

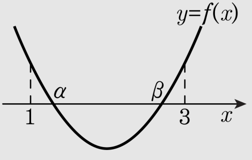
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$

$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \dfrac{13}{3}$

$\therefore\ a < \dfrac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$x = \dfrac{a}{2}$ 이므로 $1 < \dfrac{a}{2} < 3$

$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \dfrac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \dfrac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

4. 다음 그림과 같이 두 점 A , B 가 수직선 상에 위치해 있다. 선분 AB 를 2 : 3으로 내분하는 점을 D , 선분 AB 를 2 : 3 으로 외분하는 점을 E , 선분 AB 를 3 : 2 로 내분하는 점을 F , 선분 AB 를 3 : 2 로 외분하는 점을 G 라 하자. 점 D, E, F, G를 수직선 위에서 왼쪽부터 순서대로 적으시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 점 E

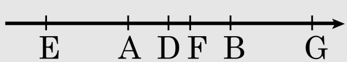
▷ 정답 : 점 D

▷ 정답 : 점 F

▷ 정답 : 점 G

해설

다음 그림에서 보듯이, 점의 순서는 E, D, F, G 이다.



5. $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ 2)$일 때, 평행사변형 OABC의 넓이를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

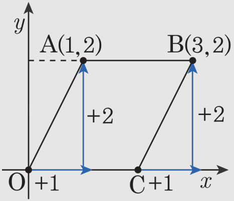
$\overline{\mathrm{OA}} /\!/ \overline{\mathrm{CB}}$, $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{CB}}$이

점 A는 점 O를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 점 B도 점 C를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore\ \mathrm{C} = (2,\ 0)$

따라서 밑변이 2, 높이가 2이므로

(넓이) $= 2 \times 2 = 4$



6. 좌표평면 위에 세 점 $A(3,\ a)$, $B(b,\ 4)$, $C(a,\ b)$가 있다. 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표가 $P(b,\ a+3)$일 때, △ABC의 무게중심의 좌표를 구하면?

① $(3,\ 2)$ ② $\left(\frac{4}{3},\ \frac{3}{2}\right)$ ③ $\left(\frac{4}{3},\ 2\right)$

④ $(2,\ 2)$ ⑤ $\left(\frac{5}{3},\ 2\right)$

해설

$\frac{3b+2\cdot 3}{3+2}=b,\ \frac{3\cdot 4+2\cdot a}{3+2}=a+3$ 이므로,

$3b+6=5b,\ 12+2a=5(a+3)$ 에서 $a=-1,\ b=3$

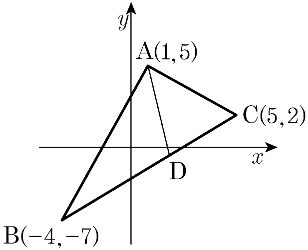
$A(3,\ -1),\ B(3,\ 4),\ C(-1,\ 3)$ 이므로

삼각형 ABC 의 무게중심을 $G(x,\ y)$ 라 하면

$x=\frac{3+3-1}{3}=\frac{5}{3},\ y=\frac{-1+4+3}{3}=2$

$\therefore\ G\left(\frac{5}{3},\ 2\right)$

7. 다음 그림과 같이 세 점 $A(1,\ 5)$, $B(-4,\ -7)$, $C(5,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$가 있다. $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 점 D의 좌표는?



① $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ ② $\left(\frac{9}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$

③ $(2,\ -1)$ ④ $\left(\frac{7}{4},\ -\frac{5}{4}\right)$

⑤ $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$

해설

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$

$\overline{AB} = \sqrt{(1+4)^2 + (5+7)^2} = 13$

$\overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-5)^2} = 5$

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 13 : 5$

$\therefore\ D\left(\frac{-20+65}{13+5},\ \frac{-35+26}{13+5}\right) = D\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

8. A $(1,1)$, B $(-2,-3)$, C $(k, k+1)$이 일직선 위에 있도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

해설

A, B, C가 일직선 위에 있으려면
$\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 기울기가 일치해야 한다.

$$\therefore \quad \frac{-3-1}{-2-1} = \frac{k+1-(-3)}{k-(-2)}$$

$$\Rightarrow \quad \therefore\ k = 4$$

9. 다음 두 직선 $y=(2a+1)x-a+2$, $y=(a+2)x+2$ 가 서로 수직일 때, a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : $-\frac{3}{2}$ 또는 -1.5

해설

$(2a+1)(a+2)=-1$

$2a^2+5a+3=0$

$(2a+3)(a+1)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $-\frac{3}{2}$

10. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라 할 때 $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k에 관하여 정리하면

$(x+2)k^2 + (x^2 + x - 2)k + (1-y) = 0$

k에 관한 항등식이므로

$x+2=0,\ x^2+x-2=0,\ 1-y=0$

$\therefore x=-2,\ y=1$

$\therefore$ 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 1)$

$\therefore\ a=-2,\ b=+1$

$\therefore\ a+b=-1$

11. 점 $(3,4)$ 에서 직선 $2x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $k=3$

해설

$\dfrac{|2\times 3-4+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$ 이므로 $|2+k|=5$ 이다.

따라서 $k=3$ $(\because\ k$ 는 양수$)$

12. 평행한 두 직선 $12x-5y=3$, $12x-5y=29$ 사이의 거리를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 12 ⑤ 26

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점을 택한 후 나머지 직선과의 거리를 구하면 된다.

$12x-5y=3$ 의 $\left(0, -\dfrac{3}{5}\right)$

$$\therefore \frac{\left|12\times 0+\left(-\frac{3}{5}\right)\times(-5)-29\right|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{26}{13}=2$$

13. 직선 $x+2y-1=0$ 에 수직이고 원점에서의 거리가 $\sqrt{5}$ 인 직선의 방정식은?

① $y-2x=-5$　　② $y-2x=-\sqrt{5}$　　③ $y+2x=5$

④ $y+2x=\sqrt{5}$　　⑤ $y+2x=-\sqrt{5}$

해설

구하는 직선의 기울기를 m' 라 하면

$-\dfrac{1}{2}m'=-1$ 에서 $m'=2$

따라서, 구하는 직선의 식은

$y=2x+n,\ 2x-y+n=0$

원점에서 이 직선까지의 거리

$$d=\frac{|n|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5},$$

$|n|=5,\ n=\pm5$

$\therefore$ 구하는 직선의 식 : $y=2x+5$ 또는 $y=2x-5$

14. 점 $(3,\ 4)$ 에서 직선 $2x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\dfrac{|2\times3-4+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$ 이므로, $|2+k|=5$ 이다.

따라서 $k=3$ ($\because$ k 는 양수)

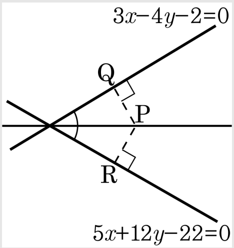
15. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라. (단, a는 양수, a, b, c는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm 5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ \ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

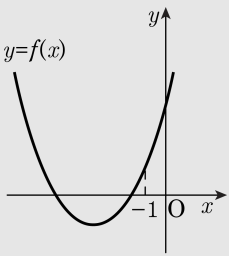
16. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서
$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$
$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$

(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(iii) $-\frac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$
이상에서 $-7<k<-3$
따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

17. 이차방정식 $x^2+2kx+6-k=0$ 의 두 근이 모두 1보다 클 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $0 \le k < 7$　② $-1 \le k \le 2$　③ $-5 \le k \le -2$

④ $-7 < k \le -1$　⑤ $-7 < k \le -3$

해설

이차방정식 $x^2+2kx+6-k=0$ 의
두 근이 모두 1 보다 크므로
$f(x)=x^2+2kx+6-k$ 로 놓으면

(i) $D \ge 0$ 이므로

$k^2+k-6 \ge 0$

$(k+3)(k-2) \ge 0$

$\therefore k \le -3, k \ge 2$

(ii) $x^2+2kx+6-k=(x+k)^2+6-k-k^2$ 에서

$-k>1$

$\therefore k<-1$

(iii) $f(1)>0$ 이므로

$1+2k+6-k>0$

$\therefore k>-7$

따라서 (i), (ii), (iii) 에서
$\therefore -7<k \le -3$

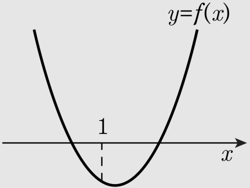
18. 이차방정식 $x^2 - mx + 4 = 0$ 의 두 근 사이에 1 이 있도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $m < -5$ ② $m > -2$ ③ $-2 < m < 2$

④ $m > 2$ ⑤ $m > 5$

해설

$f(x) = x^2 - mx + 4$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(1) < 0$ 에서 $5 - m < 0$

$\therefore\ m > 5$

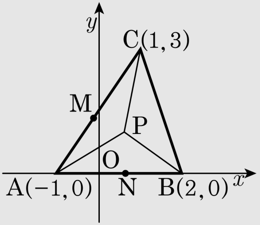
19. 좌표평면 위에 세 점 $A(-1,0)$, $B(2,0)$, $C(1,3)$ 이 있다. $\triangle ABC$ 의 내부의 점 P가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P가 그리는 도형의 길이는?

① $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P가 $\triangle ABC$ 의 내부의 점이고

$\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



$\therefore\ \triangle BPC = \dfrac{1}{2}\triangle ABC$

점 P는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M, N 을 잇는 선분 위에 있다.

그런데 $M\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

점 P의 자취 $\overline{MN} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{4}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

20. 부등식 $|x^2+x+1| \le |x+2|$의 해는?

① $x \le -1$ ② $-1 \le x \le 1$ ③ $x \ge 1$

④ 해는 없다. ⑤ 모든 실수

해설

$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$|x^2+x+1|=x^2+x+1$

$x^2+x+1 \le |x+2|$에서

(i) $x<-2$일 때,

$x^2+x+1 \le -(x+2),\ x^2+2x+3 \le 0$

$(x+1)^2+2 \le 0$

그런데 $(x+1)^2>0$이므로 해는 없다.

(ii) $x \ge -2$일 때,

$x^2+x+1 \le x+2,\ x^2 \le 1$

$\therefore -1 \le x \le 1$

(i), (ii)에 의해 $\therefore -1 \le x \le 1$

21. 임의의 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2+2xy+2x+ay+b>0$이 성립할 a, b의 조건은? (단, a, b는 실수)

① $a=1,\quad b>2$ ② $a=1,\quad b<2$ ③ $a=2,\quad b>1$

④ $a=2,\quad b\geq 1$ ⑤ $a=2,\quad b\leq 1$

해설

준식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(1+y)x+y^2+ay+b>0$ 이고

임의의 실수 x에 대하여 항상 성립하기 위해서는

$D/4<0$를 만족해야 한다.

$D/4=(1+y)^2-(y^2+ay+b)<0$

$\therefore (2-a)y+1-b<0\cdots$①

①식이 모든 실수 y에 성립할 조건은

$(2-a)=0,\quad 1-b<0,$

$\therefore a=2,\quad b>1$

22. 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$ 을 풀 때, 근우는 b 를 잘못보고 풀어서 $1 < x < 3$ 이라는 해를 얻었고, 기원이는 a 를 잘못보고 풀어서 $-2 < x < 4$ 이라는 해를 얻었다. 이 부등식의 옳은 해는?

① $-1 < x < 2$ ② $-2 < x < 3$

③ $2 - 2\sqrt{5} < x < 2 + 2\sqrt{5}$ ④ $1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$

⑤ $2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

해설

$1 < x < 3 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$

$\therefore a = -4$

$-2 < x < 4 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) < 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 < 0$

$\therefore b = -8$

$x^2 - 4x - 8 < 0$

$\therefore 2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

23. 두 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$, $x^2+(a-1)x+a^2=0$중 적어도 하나가 실근을 갖기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a<\frac{1}{2},\ 2<a$ ② $a\le 1,\ 3\le a$ ③ $a\le\frac{1}{2},\ 3<a$
④ $a\le\frac{1}{2},\ 2<a$ ⑤ $a\le\frac{1}{3},\ a\ge 2$

해설

각각 실근을 가질 조건은 차례로

$\frac{D_1}{4}=a^2-(a+2)\ge 0$에서

$(a-2)(a+1)\ge 0,\ a\le -1,\ a\ge 2\cdots$ ①

또, $D_2=(a-1)^2-4a^2\ge 0$에서

$(3a-1)(a+1)\le 0,\ \ -1\le a\le\frac{1}{3}\cdots$ ②

따라서, 적어도 하나가 실근을 갖기 위한

a의 범위는 ① 또는 ②이므로

$a\le\frac{1}{3},\ a\ge 2$

24. x가 실수일 때, 두 함수 $f(x)=x^2+2x-8$, $g(x)=x^2-19$ 에 대하여 부등식 $(f\circ g)(x)\le 0$ 을 만족하는 양의 정수 x 는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$g(x)=k$ 라고 하면

$(f\circ g)(x)\le 0 \Rightarrow f(k)\le 0$
$\Rightarrow -4\le k\le 2$
$\Rightarrow -4\le g(x)\le 2$
$\Rightarrow 15\le x^2\le 21$

$\therefore$ 양의 정수 $x=4$

25. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 2 \le 0 \\ x^2 - (k+3)x + k + 2 < 0 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 x의 범위가 $1 < x \le 2$일 때, k의 범위는?

① $k > -1$ ② $k > 0$ ③ $k < -1$

④ $k < 1$ ⑤ $k > -2$

해설

$x^2 - x - 2 \le 0$ 에서

$(x+1)(x-2) \le 0 \quad \therefore -1 \le x \le 2 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2 - (k+3)x + k + 2 < 0$ 에서

$\{x - (k+2)\} \cdot (x-1) < 0 \cdots\cdots$ ㉡

i) $k + 2 < 1$ 이면

㉡의 해는 $k + 2 < x < 1$ 가 되므로

㉠, ㉡ 의 공통범위가 $1 < x \le 2$ 가 될 수 없다.

ii) $k + 2 > 1$ 이면

㉡의 해는 $1 < x < k + 2 \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢의 공통범위가 $1 < x \le 2$ 가 되려면

$k + 2 > 2 \quad \therefore k > 0$

26. x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+6-a=0$의 모든 실근이 모두 1보다 클 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $3<a\le 7$
② $-3\le a<7$
③ $-7<a\le -3$
④ $a\le 3$ 또는 $a>7$
⑤ $a<-7$ 또는 $a\ge -3$

해설

이차함수 $f(x)=x^2+2ax+6-a$의 그래프를 생각하면

$$\frac{D}{4}=a^2-6+a\ge 0,\quad (a+3)(a-2)\ge 0$$

$\therefore\ a\le -3,\ a\ge 2 \cdots$ ㉠

$f(1)=1+2a+6-a>0$

$\therefore\ a>-7 \cdots\cdots$ ㉡

대칭축 $x=-a$ 에서 $-a>1$

$\therefore\ a<-1 \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통범위는 $-7<a\le -3$

27. $|p| < 2$를 만족하는 모든 실수 p에 대하여 부등식 $x^2 + px + 1 > 2x + p$가 성립하도록 하는 x의 값의 범위는?

① $x \le -3$, $x = -1$, $x \ge 1$　　② $x \le -1$, $x = 1$, $x \ge 3$

③ $x \le -3$, $x \ge 1$　　④ $x \le -1$, $x \ge 3$

⑤ $-3 \le x \le -1$

해설

$x^2 + px + 1 > 2x + p$, $(x-1)p + x^2 - 2x + 1 > 0$

$f(p) = (x-1)p + x^2 - 2x + 1$이라 하면, $f(p) > 0$이다.

$-2 < p < 2$에서 $f(p) > 0$이기 위한 조건은 $f(-2) \ge 0$ 이고 $f(2) \ge 0$ 이어야 한다.

$f(-2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 4x + 3 \ge 0$

$\therefore\ (x-1)(x-3) \ge 0$

$\therefore\ x \le 1$, $x \ge 3$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 1 \ge 0$

$\therefore\ (x+1)(x-1) \ge 0$

$\therefore\ x \le -1$, $x \ge 1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\therefore\ x \le -1$, $x = 1$, $x \ge 3$

그런데 $x = 1$ 일 때 $f(p) = 0 \cdot p + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ 이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

따라서 구하는 x값의 범위는 $x \le -1$, $x \ge 3$

28. 세 점 $A(-1,\ 1)$, $B(3,\ 1)$, $C(4,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$의 외심을 $O(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

점 O에서 세 점 $A(-1,\ 1)$, $B(3,\ 1)$, $C(4,\ 2)$에 이르는 거리는 같으므로

$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$에서 $2a+1=-6a+9$

$\therefore\ a=1$

$\overline{OB}^2 = \overline{OC}^2$에서 $-2b+5=-4b+13$

$\therefore\ b=4$

그러므로 $a+b=5$

29. 세 변의 중점의 좌표가 $(-2,3)$, $(3,-1)$, $(5,4)$ 인 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표는?

① $(-1,8),(-4,-2),(10,2)$　② $(0,8),(4,2),(10,0)$

③ $(-1,8),(4,2),(10,0)$　④ $(-1,-8),(4,-2),(10,-2)$

⑤ $(0,8),(-4,-2),(10,0)$

해설

세 꼭짓점의 좌표를 각각

(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) 로 놓으면,

$$\frac{x_1+x_2}{2}=-2,\quad \frac{x_2+x_3}{2}=3,\quad \frac{x_3+x_1}{2}=5$$

$$\therefore\ x_1+x_2=-4,\quad x_2+x_3=6,\quad x_3+x_1=10$$

$$\therefore\ x_1=0,\quad x_2=-4,\quad x_3=10$$

$$\frac{y_1+y_2}{2}=3,\quad \frac{y_2+y_3}{2}=-1,\quad \frac{y_3+y_1}{2}=4$$

$$\therefore\ y_1+y_2=6,\quad y_2+y_3=-2,\quad y_3+y_1=8$$

$$\therefore\ y_1=8,\quad y_2=-2,\quad y_3=0$$

따라서 세 꼭짓점의 좌표는

$(0,8),(-4,-2),(10,0)$ 이다.

30. 세 도시 A, B, C 가 삼각형의 꼭짓점을 이루며 위치해 있다. 송전소를 세우려고 하는 데 이 송전소에서 각 도시까지 송전하는데 드는 비용은 송전소에서 그 도시까지의 거리의 제곱의 합에 비례한다고 한다. 이 때 송전 비용을 최소로 하는 송전소의 위치는?

① 외심 ② 내심 ③ 수심

④ 무게중심 ⑤ 방심

해설

$\mathrm{A}(x_1,\ y_1),\quad \mathrm{B}(x_2,\ y_2),\quad \mathrm{C}(x_3,\ y_3)$

송전소의 위치를 D(x, y), 비용을 P 라고 하면

$$\mathrm{P}=k\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2\}$$

$$=k\left\{3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2\right\}$$

$$-\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3}-\frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3}$$

$$+k(x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2)$$ 에서

$x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$ 일 때

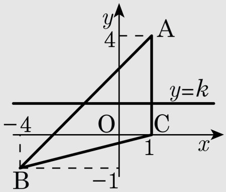
즉 $\triangle$ABC 의 무게중심에 위치할 때 비용이 최소이다.

31. 좌표평면 위의 세 점 $A(1,4)$, $B(-4,-1)$, $C(1,0)$ 을 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 넓이를 직선 $y=k$가 이등분할 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $4-\sqrt{5}$ ② $4-\sqrt{6}$ ③ $4-\sqrt{7}$

④ $4-2\sqrt{2}$ ⑤ $4-\sqrt{10}$

해설



$\triangle ABC$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\times 5=10$

$\overline{AB}$ 의 방정식을 구하면, $y=\frac{-1-4}{-4-1}(x-1)+4$

$\Rightarrow \quad y=x+3$

$\therefore \quad y=k$와 삼각형이 만나는 점의 좌표는 $(k-3,\ k),\ (1,\ k)$

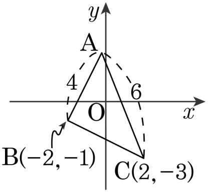
$\Rightarrow$이등분된 위쪽 삼각형 넓이를 구해보면

$\frac{1}{2}\times(1-(k-3))\times(4-k)=5$

방정식을 풀면, $k=4\pm\sqrt{10}$

$\therefore \quad k=4-\sqrt{10}\ (\because\ k<4)$

32. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=6$, $B(-2,\ -1)$, $C(2,\ -3)$이고 점 A에서 $\overline{BC}$에 선을 그었을 때, $\triangle ABC$의 넓이를 이등분하는 점을 D라 하자. 선분 AD의 길이는?



① 4　　② $\sqrt{17}$　　③ $3\sqrt{2}$

④ $2\sqrt{5}$　　⑤ $\sqrt{21}$

해설

점 D가 $\overline{BC}$의 중점일 때

$\triangle ABD=\triangle ACD$가 되어 넓이를 이등분한다.

이 때, 점 D의 좌표는 $D\left(\dfrac{-2+2}{2},\ \dfrac{-1-3}{2}\right)$

$\therefore\ D(0,\ -2)$

또, $\overline{BD}=\sqrt{(0+2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{5}$이고

점 D가 $\overline{BC}$의 중점이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$이 성립한다.

즉, $4^2+6^2=2(\overline{AD}^2+5)$

$\overline{AD}^2+5=26,\ \overline{AD}^2=21$

$\therefore\ \overline{AD}=\sqrt{21}$

33. 점 A(3, -1)과 직선 $x+y-3=0$ 위의 점 P를 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x+2y-5=0$

② $2x-2y+5=0$

③ $2x-y-5=0$

④ $x+y-5=0$

⑤ $2x+2y-5=0$

해설

$x+y-3=0$ 위의 임의의 한 점을 P(a, $-a+3$) 이라 하고 $\overline{\mathrm{AP}}$ 의 중점의 좌표를 Q (x, y)라 하면

$$x=\frac{a+3}{2},\quad y=\frac{-a+2}{2}$$

$\therefore\ a=2x-3,\quad a=-2y+2$

$\therefore\ 2x-3=-2y+2$

$\therefore\ 2x+2y-5=0$

34. 이차부등식 $-4x^2+12x-9 \geq 0$의 해는?

① $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

② $x \leq -\frac{3}{2},\ x \geq \frac{3}{2}$

③ $x \neq \frac{3}{2}$인 모든 실수

④ 해는 없다.

⑤ $x = \frac{3}{2}$

해설

$-4x^2+12x-9 \geq 0$

$\Rightarrow\ 4x^2-12x+9 \leq 0$

$\Rightarrow\ (2x-3)^2 \leq 0$

$\therefore\ x = \frac{3}{2}$

35. $64 \le 16x - x^2$ 의 해를 구하면?

① $4 \le x \le 8$ ② $x = 8$ ③ 해는 없다.

④ 모든 실수 ⑤ $x \le 8$

해설

$64 \le 16x - x^2$

$x^2 - 16x + 64 \le 0$

$\Rightarrow \quad (x-8)^2 \le 0$

$\Rightarrow \quad x = 8$

36. x에 대한 부등식 $x(x+1) < a(x+1) - 1$의 해가 존재하지 않을 때, 실수 a의 범위는?

① $a \le -3$ 또는 $a \ge 1$

② $-3 \le a \le 1$

③ $a < -3$ 또는 $a > 1$

④ $-3 < a < 1$

⑤ $-1 \le a \le 3$

해설

$x(x+1) < a(x+1)-1$을 전개하여 이항하면 $x^2+(1-a)x-a+1 < 0$
이차항의 계수가 양수이므로 판별식 $D \le 0$이면 부등식의 해가 없다.

$D = (1-a)^2 + 4(a-1) \le 0$

$(a-1)(a+3) \le 0$

$\therefore \ -3 \le a \le 1$

37. 부등식 $x^2 - 5|x| + 4 \leq 0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하면?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

(i) $x > 0$

$x^2 - 5x + 4 \leq 0$

$(x-1)(x-4) \leq 0$

$\Rightarrow \quad 1 \leq x \leq 4$

(ii) $x < 0$

$x^2 + 5x + 4 \leq 0$

$(x+1)(x+4) \leq 0$

$\Rightarrow \quad -4 \leq x \leq -1$

$\therefore$ 정수의 개수 : 8개

38. 부등식 $x^2-2x-2<2|x-1|$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값은?

① 0 ② -2 ③ 2 ④ 6 ⑤ -6

해설

$x^2-2x-2<2|x-1|$에서 구간을 나누어 해를 구한다.

(i) $x\geq1$일 때, $x^2-2x-2<2(x-1)$

$x^2-4x<0,\ x(x-4)<0,\ 0<x<4$

공통범위는 $1\leq x<4$

(ii) $x<1$일 때, $x^2-2x-2<-2(x-1)$

$x^2-4<0,\ -2<x<2$

공통범위는 $-2<x<1$

i + ii : $-2<x<4 \Leftrightarrow \alpha<x<\beta$

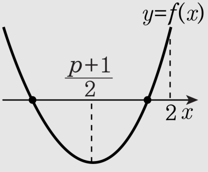
$\therefore \beta-\alpha=4-(-2)=6$

39. x에 대한 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2-p=0$의 서로 다른 두 근이 모두 2보다 작을 때, 양수 p의 값의 범위는?

① $0<p<1$ ② $\frac{1}{2}<p<1$ ③ $1\le p<2$
④ $1<p<\frac{4}{3}$ ⑤ $p>1$

해설

$f(x)=x^2-(p+1)x+2-p$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D라 하면
$\mathrm{D}=(\mathrm{p}+1)^2-4(2-\mathrm{p})>0$
$p^2+6p-7>0,\ (p+7)(p-1)>0$
$\therefore p<-7$ 또는 $p>1$
(ii) $f(2)>0$ 에서 $2^2-(p+1)\cdot 2+2-p>0$
$3p<4$
$\therefore p<\frac{4}{3}$
(iii) $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{p+1}{2}$ 이므로
$\frac{p+1}{2}<2$
$\therefore p<3$
(i), (ii), (iii) 에서 $p<-7$ 또는 $1<p<\frac{4}{3}$
그런데 $p>0$ 이므로 $1<p<\frac{4}{3}$

40. 이차방정식 $x^2-2mx+m+6=0$의 두 근이 모두 1보다 작을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $m \le -6$ ② $m \le -4$ ③ $m \le -2$

④ $m \le 0$ ⑤ $m \le 2$

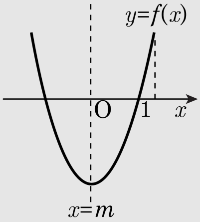
해설

$f(x)=x^2-2mx+m+6=(x-m)^2-m^2+m+6$으로 놓으면

$\frac{D}{4}=m^2-1\cdot(m+6)=m^2-m-6$

$f(1)=1-2m+m+6=-m+7$

두 근이 모두 1보다 작으려면 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



따라서,

(i) 판별식 : $\frac{D}{4}=m^2-m-6 \ge 0$

$(m+2)(m-3) \ge 0$

$\therefore m \le -2$ 또는 $m \ge 3 \cdots\cdots$ ㉠

(ii) 경계값의 부호 : $f(1)=-m+7>0$

$\therefore m<7 \quad \cdots\cdots$ ㉡

(iii) 축 : $m<1 \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢으로부터 구하는 m의 값의 범위는 $m \le -2$