

1. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 를 만족하는 실수 해의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▶ 정답 : 1개

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 & \cdots \textcircled{A} \\ (x - 1)^2 + y^2 = 2 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

$\textcircled{A}$ 에서 $x^2 - (y - 3)^2 = 0$
 $(x + y - 3)(x - y + 3) = 0$
 $y = x + 3$ 또는 $y = -x + 3$
i) $y = -x + 3$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면,
 $x^2 - 4x + 4 = 0$
 $\therefore x = 2$ 이 때, $y = 1$
ii) $y = x + 3$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면,
 $x^2 + 2x + 4 = 0$
 $\therefore x = -1 \pm \sqrt{3}i$
이 때, $y = 2 \pm \sqrt{3}i$
i), ii)에서 실수해의 순서쌍은 (2, 1)이다.
따라서 실수해의 순서쌍의 개수는 1개이다.

2. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x,y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $y = -x + 2a$ 를 ②에 대입하면

$$x(-x + 2a) = a$$

$\therefore -x^2 + 2ax = a$ 즉 $x^2 - 2ax + a = 0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4 = a^2 - a = 0$

$\therefore a = 0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$$a = 1$$

3. 일차부등식 $ax - b > 0$ 의 해가 $x < 2$ 일 때, $(a - b)x + (2a + 3b) > 0$ 의 해를 구하면?

① $x > 5$ ② $x < 7$ ③ $x > 7$ ④ $x < 8$ ⑤ $x > 8$

해설

부등호의 방향이 반대로 바뀌었으므로 $a < 0$ 이다. $ax - b > 0$

$$\Rightarrow x < \frac{b}{a}, \quad \frac{b}{a} = 2$$

$$2a = b \Rightarrow a < 0, \quad b < 0$$

$$(a - b)x + (2a + 3b) > 0 \text{ 에서 } a - b = -a > 0$$

$$\therefore x > \frac{-(2a + 3b)}{(a - b)}, \quad \frac{-(2a + 3b)}{a - b} = \frac{-8a}{-a} = 8$$

$$\Rightarrow x > 8$$

4. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x = 0$ 을 대입하면
 $1 = 0$ 이 되어 모순이므로 $x \neq 0$ 이다.
따라서, 주어진 식의 양변을
 x^2 으로 나누면
$$x^2 + 5x - 12 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$
$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0$$
$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$$
여기서 $x + \frac{1}{x} = X$ 로 놓으면
 $X^2 + 5X - 14 = 0, (X + 7)(X - 2) = 0$ $\therefore X = -7$ 또는 $X = 2$
(i) $X = -7$ 일 때,
 $x + \frac{1}{x} = -7$ 에서
 $x^2 + 7x + 1 = 0$ $\therefore \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$
(ii) $X = 2$ 일 때,
 $x + \frac{1}{x} = 2$ 에서
 $x^2 - 2x + 1 = 0, (x - 1)^2 = 0$ $\therefore x = 1$
(i), (ii)로부터
 $x = 1$ (중근) 또는 $x = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$
따라서, 모든 근의 합은
 $1 + \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2} + \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2} = -6$ 이다.

5.
$$\begin{cases} |x| + x + y = 10 \\ x + |y| - y = 12 \end{cases}$$
 일 때, $x + y$ 의 값은?

- ① -2 ② 2 ③ $\frac{18}{5}$ ④ $\frac{22}{3}$ ⑤ 22

해설

$|x| + x + y = 10$ ㉠
 $x + |y| - y = 12$ ㉡
 $x \leq 0$ 이면, $y = 10, x = 12$
 이것은 $x \leq 0$ 을 만족하지 않는다.
 $x > 0$ 이면 $2x + y = 10$㉢
 $y \geq 0$ 이면 $x = 12, y = -14$
 이것은 $y \geq 0$ 을 만족하지 않는다.
 $y < 0$ 이면, $x - 2y = 12$㉣
 ㉢, ㉣에서 $x = \frac{32}{5}, y = -\frac{14}{5}$
 $\therefore x + y = \frac{18}{5}$

6. 방정식 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{21}$ (단, $x < y$)을 만족하는 양의 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 에 대하여 $x + y$ 의 최댓값을 구하면?

① 484 ② 192 ③ 112 ④ 100 ⑤ 548

해설

$21(x + y) = xy, \quad xy - 21(x + y) = 0$
 $\therefore (x - 21)(y - 21) = 21^2 = 3^2 \times 7^2$
 $21x = (x - 21)y$ 이고 $y > x > 0$ 이므로
 $y - 21 > x - 21 > 0$
 $\therefore (x - 21, y - 21)$
 $= (1, 441), (3, 147), (7, 63), (9, 49)$
 $\therefore (x, y)$
 $= (22, 462), (24, 168), (28, 84), (30, 70)$
 $\therefore x + y$ 의 최댓값은 $22 + 462 = 484$

7. 연립부등식 $\begin{cases} 1 < x + 5y < 5 \\ -2 < 2x + 7y < 3 \end{cases}$ 을 성립시키는 정수로 이루어진
순서쌍 (x, y) 중 $x + y$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때,
 $M + 2m$ 의 값을 구하면?

- ① -9
- ② -13
- ③ -18
- ④ -22
- ⑤ -26

해설

$1 < x + 5y < 5 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $-2 < 2x + 7y < 3 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠} \times (-2) + \textcircled{㉡}$ 을 하면
 $-10 < -2x - 10y < -2 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $-2 < 2x + 7y < 3 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉢} + \textcircled{㉡} = -12 < -3 < 1$
그러므로, $-\frac{1}{3} < y < 4$
그런데, y 는 정수이므로 $y = 0, 1, 2, 3$
이것을 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉢}$ 에 대입하여 적합한 x 의 값을 구하면
 $(x, y) = (-3, 1), (-6, 2), (-7, 2), (-11, 3)$
따라서, $x + y$ 의 최댓값은 $-3 + 1 = -2$ 이고,
최솟값은 $-11 + 3 = -8$ 이다.
 $\therefore M = -2, m = -8 \therefore M + 2m = -18$

8. $A : 5(x+1) > 2x-1$, $B : \frac{x-4}{3} + \frac{3x+1}{2} > 1$ 에 대하여 A 에서 B 를 제외한 수들의 갯수는? (단, x 는 정수)

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$A : x > -2$, $B : x > 1$ 이므로
 A 에서 B 를 제외한 수는 $-1, 0, 1$
따라서 3개이다.

9. 연립부등식
$$\begin{cases} 1.2x - 2 \leq 0.8x + 3.2 \\ 3 - \frac{x-2}{4} < \frac{2x-3}{2} \\ 0.9x \leq 6 \end{cases}$$
 의 해가 $a < x \leq b$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하면?

- ① -9 ② -5 ③ -2 ④ 2 ⑤ 9

해설

i) $1.2x - 2 \leq 0.8x + 3.2$,
 $0.4x \leq 5.2$, $x \leq 13$
ii) $3 - \frac{x-2}{4} < \frac{2x-3}{2}$ 의 양변에 4 를 곱하면 $12 - (x - 2) <$
 $2(2x - 3)$, $x > 4$
iii) $0.9x \leq 6$
 $\frac{9}{9}x \leq 6$
 $x \leq 6$
 $\therefore 4 < x \leq 6$

10. 부등식 $|x^2 + x + 1| \leq |x + 2|$ 의 해는?

① $x \leq -1$

② $-1 \leq x \leq 1$

③ $x \geq 1$

④ 해는 없다.

⑤ 모든 실수

해설

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{이므로}$$

$$|x^2 + x + 1| = x^2 + x + 1$$

$$x^2 + x + 1 \leq |x + 2| \text{에서}$$

(i) $x < -2$ 일 때,

$$x^2 + x + 1 \leq -(x + 2), \quad x^2 + 2x + 3 \leq 0$$

$$(x + 1)^2 + 2 \leq 0$$

그런데 $(x + 1)^2 > 0$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x \geq -2$ 일 때,

$$x^2 + x + 1 \leq x + 2, \quad x^2 \leq 1$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 1$$

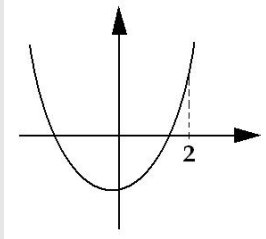
(i), (ii)에 의해 $\therefore -1 \leq x \leq 1$

11. $x > 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2kx + k - 1 > 0$ 을 성립하게 하는 실수 k 의 최댓값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$D/4 = k^2 - k + 1 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.



문제의 조건을 만족하기 위해서는 대칭축이 2보다 왼쪽에 있어야 하고 $f(2) \geq 0$ 의 두 조건을 모두 만족해야 한다.

대칭축 조건에서 $k < 2$ ㉠

$f(2) = 3 - 3k \geq 0$ 에서 $k \leq 1$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k \leq 1$

k 의 최댓값은 1이다.

12. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0 \\ x^2 - (a + 6)x + 6a \leq 0 \end{cases}$ 의 정수의 해가 5와 6일 때, a

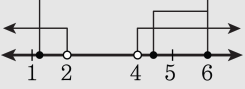
의 값의 범위는 $p < a \leq q$ 이다. 이때, $p + q$ 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0 \cdots \textcircled{1} \\ x^2 - (a + 6)x + 6a \leq 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①: $x > 4, x < 2$
②: $(x - 6)(x - a) \leq 0$
①과 ②의 정수해가 5, 6이라면
②의 해는 $a \leq x \leq 6$
①과 ②의 정수해가 5, 6이 되도록
수직선으로 나타내면 다음과 같다.



$$1 < a \leq 5$$
$$p + q = 1 + 5 = 6$$

13. 직선 $y = x - 1$ 위에 있고 점 A(1, 0), B(3, 2)에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표가 (a, b) 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$y = x - 1$ 위에 잇는 점 P는 $(\alpha, \alpha - 1)$ 로 나타낼 수 있다.

$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1)^2 = (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 3)^2, \alpha = 2$$

$\therefore P(2, 1)$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

14. 세 점 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(2,-2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 의 외심의 좌표를 $P(a,b)$ 라 할 때, $a^2 - b^2$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

외심 (외접원의 중심)은 세 꼭짓점으로부터 거리가 같은 점이므로

$\overline{PO}^2 = \overline{PA}^2$ 으로부터

$$a^2 + b^2 = (a - 1)^2 + (b - 1)^2, \quad a + b = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$\overline{PO}^2 = \overline{PB}^2$ 으로부터

$$a^2 + b^2 = (a - 2)^2 + (b + 2)^2, \quad a - b = 2 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{로 부터 } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 1 \times 2 = 2$$

15. 두 점 A(2, -2), B(1, 3)에 대하여 선분 AB 를 $(1+t) : t$ 로 외분하는 점이 제2사분면에 속할 때, t 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $t > 1$

해설

선분 AB 를 $(1+t) : t$ 로 외분하는 점을 Q 라 하면

$$Q\left(\frac{(1+t) \cdot 1 - t \cdot 2}{(1+t) - t}, \frac{(1+t) \cdot 3 - t \cdot (-2)}{(1+t) - t}\right)$$

즉, $Q(1-t, 3+5t)$ 이때, 점 Q 가 제2사분면에 속하므로

$$1-t < 0, 3+5t > 0$$

따라서 $t > 1$

16. 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점을 M이라하자. 두 점 A,C의 좌표는 각각 A(-2,6),C(4,0)이고, 삼각형 MBC의 무게중심은 원점이다. 점 D의 좌표를 (a,b) 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

점 M은 선분 AC의 중점이므로

M의 좌표는 $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (1,3)$.

삼각형 MBC의 무게중심은 원점이므로

점 B의 좌표를 (c,d) 라고 하면

$$\frac{1+c+4}{3} = 0 \text{에서 } c = -5$$

$$\frac{3+d+0}{3} = 0 \text{에서 } d = -3$$

따라서 점 B의 좌표는 $(-5,-3)$ 이다. 점 M은 선분 BD의 중점이므로

$$\frac{-5+a}{2} = 1 \text{에서 } a = 7$$

$$\frac{-3+b}{2} = 3 \text{에서 } b = 9$$

$$\therefore a+b = 16$$

17. 두 점 A(3, 2), B(a, b) 를 지나는 직선의 기울기가 2 이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$ 의 교점은 선분 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$ 의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB 의 기울기는 2 이므로

$$\frac{b-2}{a-3} = 2, b-2 = 2(a-3), b = 2a-4 \cdots \textcircled{1}$$

$\overline{AB}$ 를 2 : 1 로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1 \cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1 \cdot 2}{2+1} \right) = \left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3} \right) \text{ 이고,}$$

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3} + 2 \cdot \frac{2b+2}{3} - 3 = 0$$

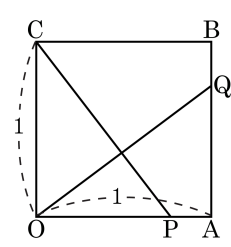
$$\therefore a+2b-1=0 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = \frac{9}{5}, b = -\frac{2}{5} \text{ 이다.}$$

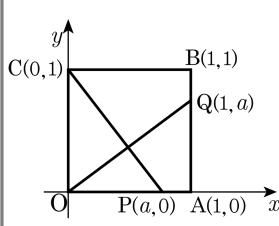
$$\therefore 3a+b=5$$

18. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 OABC의 두 변 $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ 위에 각각 점 P, Q를 $\overline{OP} = \overline{AQ}$ 가 되도록 잡을때, $(\overline{CP}$ 의 기울기) $\times$ $(\overline{OQ}$ 의 기울기)를 구하면?
- ① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $\frac{1}{2}$
 ④ 1 ⑤ 2



해설

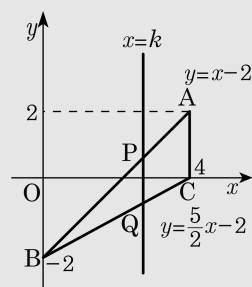
정사각형 OABC에 다음 그림과 같이 좌표축을 잡으면 $(\overline{CP}$ 의 기울기) $= -\frac{1}{a}$,
 $(\overline{OQ}$ 의 기울기) $= \frac{a}{1}$
 따라서, 두 직선의 기울기의 곱은
 $\left(-\frac{1}{a}\right) \times \left(\frac{a}{1}\right) = -1$



19. 세 점 A (4, 2) , B (0, -2), C (4, 0)을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 직선 $x = k$ 가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, k 의 값은?

- ① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설



직선 $x = k$ 와 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 와의 교점을 각각 P, Q라 하면

P ($k, k - 2$), Q ($k, \frac{1}{2}k - 2$)이다.

삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$ 이므로

삼각형 PBQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left\{ (k - 2) - \left(\frac{1}{2}k - 2 \right) \right\} \times k = 2, \quad k^2 = 8$$

$$\therefore k = 2\sqrt{2} \quad (\because 0 < k < 4)$$

20. 다음 두 직선 $2x + y - 2 = 0, mx - y - 3m + 5 = 0$ 이 제 1 사분면에서 만나도록 m 의 값의 범위는?

- ㉠ $1 < m < \frac{5}{2}$
 ㉡ $1 \leq m < \frac{5}{2}$
 ㉢ $1 < m \leq \frac{5}{2}$
- ㉣ $2 < m < \frac{5}{2}$
 ㉤ $2 \leq m < \frac{5}{2}$

해설

두 직선의 방정식을 연립하여 교점을 찾으면

$$\Rightarrow \left(\frac{3m-3}{m+2}, \frac{-4m+10}{m+2} \right)$$

교점이 1 사분면 위에 있으므로

$$\text{i) } \frac{3(m-1)}{m+2} > 0$$

$$\Rightarrow m < -2 \text{ 또는 } m > 1$$

$$\text{ii) } \frac{2(2m-5)}{m+2} < 0$$

$$\Rightarrow -2 < m < \frac{5}{2}$$

i), ii) 의 공통영역을 구하면 $1 < m < \frac{5}{2}$

해설

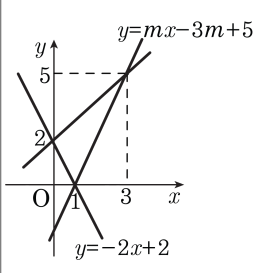
$2x + y - 2 = 0$ 의 x, y 절편의 좌표를

각각 구하면 $(1, 0), (0, 2)$ 이고

$y = m(x-3) + 5$ 는 다음 그림과 같이 m 값에 관계없이 $(3, 5)$ 를 지나는 직선이다. $(0, 2)$ 를 대입하면 $m = 1, (1, 0)$

을 대입하면 $m = \frac{5}{2}$

$$\therefore 1 < m < \frac{5}{2}$$



21. 다음 그림과 같이 직선으로 흐르는 강이 마을 O로부터 동쪽으로 6 km, 북쪽으로 3 km 떨어져 있다. 또 마을 O로부터 동쪽으로 5 km, 북쪽으로 4 km의 위치에 마을 P가 있다. 이 때, 마을 P에서 강까지의 최단 거리를 구하시오. (단위는 km)

- ① $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

해설

마을 O를 원점 O로 하여 다음 그림과 같이 좌표축을 잡는다.

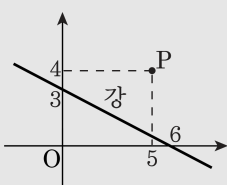
강을 나타내는 직선의 방정식을 구하면,

$$y = -\frac{1}{2}x + 3 \text{ 즉, } x + 2y - 6 = 0$$

이때, 마을 P의 좌표는 (5, 4)이다.

따라서, 점 (5, 4)에서 직선 $x + 2y - 6 = 0$ 까지의 거리를 구하면

$$\frac{|5 + 8 - 6|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} (km)$$



22. 좌표평면 위의 원점에서 직선 $3x - y + 2 - k(x + y) = 0$ 까지의 거리의 최대값은?(단, k 는 실수)

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

해설

원점 O 에서 직선 $(3 - k)x - (1 + k)y + 2 = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|2|}{\sqrt{(3 - k)^2 + (1 + k)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2k^2 - 4k + 10}}$$

거리가 최대가 되려면 분모가 최소일 때이다.

$$2k^2 - 4k + 10 = 2(k - 1)^2 + 8 \geq 8 \text{ 이므로}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2k^2 - 4k + 10}} \leq \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \text{ 최대값 } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

23. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 7$ 의 공통현의 길이를 구하면?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^2 + y^2 = 1$ 은 중심이 원점이고 반지름이 1인 원이다.
 $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 7$ 은 중심이 (3, 3)이고 반지름이 5인 원이다.
공통현의 방정식은
 $(x^2 + y^2 - 1) - (x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7) = 0$
 $\therefore x + y + 1 = 0$
이때, $x^2 + y^2 = 1$ 의 원과 $x + y + 1 = 0$ 의 교점을 구하면
(0, -1), (-1, 0)에서 접하여 공통현의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다.

24. 원 $x^2 + y^2 = 8$ 과 제1사분면에서 접하는 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A,B 라고 할 때, 직각삼각형 OAB 의 넓이의 최소값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

제1사분면에서의 원 위의 접점을 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은 $x_1x + y_1y = 8 \cdots \cdots \textcircled{1}$ (단, $x_1 > 0, y_1 > 0$)

한편, 두 점 A,B 는 각각 접선 $\textcircled{1}$ 과 x 축, y 축의 교점이므로

$$A\left(\frac{8}{x_1}, 0\right), B\left(0, \frac{8}{y_1}\right)$$

따라서, 직각삼각형 OAB 의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x_1} \cdot \frac{8}{y_1} = \frac{32}{x_1 y_1}$$

이 때, (x_1, y_1) 이 원 $x^2 + y^2 = 8$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 8 \text{ 이고}$$

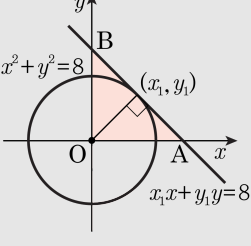
$x_1 > 0, y_1 > 0$ 에서

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1 y_1, x_1 y_1 \leq 4$$

$$\therefore \frac{1}{x_1 y_1} \geq \frac{1}{4} \leftarrow \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\therefore S = \frac{32}{x_1 y_1} \geq 32 \cdot \frac{1}{4} = 8 \text{ (단, 등호는 } x_1 = y_1 \text{ 일 때 성립)}$$

따라서, 구하는 넓이의 최소의 값은 8 이다.



25. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$x^2 + y^2 = 4 \text{ , } (x - 5)^2 + y^2 = 25$

- ① $y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)
- ② $y = \pm \frac{4}{5}x \pm 2$ (복부호 동순)
- ③ $y = \pm \frac{5}{6}x \pm \frac{7}{5}$ (복부호 동순)
- ④ $y = \pm \frac{9}{10}x \pm \frac{11}{8}$ (복부호 동순)
- ⑤ $y = \pm \frac{10}{11}x \pm \frac{4}{3}$ (복부호 동순)

해설

$x^2 + y^2 = 4 \cdots \cdots \textcircled{\tiny{\Gamma}}$

$(x - 5)^2 + y^2 = 25 \cdots \cdots \textcircled{\tiny{\Delta}}$

공통접선의 방정식을 $y = ax + b$

$\cdots \cdots \textcircled{\tiny{\Theta}}$ 로 놓으면

원 $\textcircled{\tiny{\Gamma}}$ 과 직선 $\textcircled{\tiny{\Theta}}$, 즉 $ax - y + b = 0$ 이

접하므로

$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$

$\therefore |b| = 2\sqrt{a^2 + 1} \cdots \cdots \textcircled{\tiny{\text{A}}}$

또, 원 $\textcircled{\tiny{\Delta}}$ 도 직선 $\textcircled{\tiny{\Theta}}$, 즉 $ax - y + b = 0$ 과 접하므로

$\frac{|5a + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 5$

$\therefore |5a + b| = 5\sqrt{a^2 + 1} \cdots \cdots \textcircled{\tiny{\text{B}}}$

그런데 $b \neq 0$ 이므로 $\textcircled{\tiny{\text{A}}} \div \textcircled{\tiny{\text{B}}}$ 을 하면

$\frac{|5a + b|}{|b|} = \frac{5}{2}$

$2|5a + b| = 5|b|, 2(5a + b) = \pm 5b$

$\therefore b = -\frac{10}{7}a$ 또는 $b = \frac{10}{3}a$

(i) $b = -\frac{10}{7}a$ 일 때, $\textcircled{\tiny{\text{A}}}$ 에서

$\frac{10}{7}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 7\sqrt{a^2 + 1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$24a^2 + 49 = 0$

이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(ii) $b = \frac{10}{3}a$ 일 때, $\textcircled{\tiny{\text{A}}}$ 에서

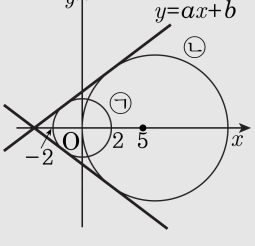
$\frac{10}{3}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $16a^2 = 9, a^2 = \frac{9}{16}$

$\therefore a = \pm \frac{3}{4}, b = \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)

(i), (ii)로부터 구하는 공통접선의 방정식은

$y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)



26. 다음은 삼각형 ABC의 각 꼭짓점을 지나는 원에 대한 어떤 성질을 설명한 것이다.

그림처럼 세 점 A, D, F를 지나는 원 C_1 과 세 점 B, D, E를 지나는 원 C_2 의 교점 P가 삼각형 ABC의 내부에 존재하도록 세 변 AB, BC, CA 위에 각각 점 D, E, F를 잡는다.

$\angle DPF + \boxed{\text{가}} = 180^\circ$
 $\angle DPE + \boxed{\text{나}} = 180^\circ$
 $\angle DPF + \angle DPE = 360 - (\boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}})$ 에서
 $\angle FPE = \boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}$
 $\therefore \angle FPE + \angle C = 180^\circ$
 따라서 세 점 C, F, E를 지나는 원을 C_3 라 할때, 다

(가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- 1

(가) $\angle A$, (나) $\angle B$, (다) C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.
- 2
- (가)
- $\angle B$
- , (나)
- $\angle A$
- , (다)
- C_1, C_2, C_3
- 은 한 점
- P
- 에서 만난다.
- 3
- (가)
- $\angle A$
- , (나)
- $\angle B$
- , (다)
- C_3
- 의 내부에 점
- P
- 가 존재한다.
- 4
- (가)
- $\angle B$
- , (나)
- $\angle A$
- , (다)
- C_3
- 의 내부에 점
- P
- 가 존재한다.
- 5
- (가)
- $\angle A$
- , (나)
- $\angle B$
- , (다)
- C_3
- 의 외부에 점
- P
- 가 존재한다.

해설

$\square ADPF$ 에서 $\angle DPF + \angle A = 180^\circ$
 $\square BEPD$ 에서 $\angle DPE + \angle B = 180^\circ$
 따라서 $\angle DPF + \angle DPE = 360^\circ - (\angle A + \angle B)$
 $\angle FPE = \angle A + \angle B$
 $\therefore \angle FPE + \angle C = 180^\circ$
 따라서 세 점 C, F, E를 지나는 원을 C_3 라 할 때,
 세 원 C_1, C_2, C_3 는 한 점 P에서 만난다.

27. 삼차방정식 $x^3 + (1 - 2a)x^2 + (a^2 - a + 1)x - a = 0$ 이 단 한 개의 실근을 갖게 하는 실수 a 의 값의 범위는? (단, 중근은 한 개의 해로 한다.)

- ① $-3 \leq a < 1$ ② $-3 < a \leq 1$ ③ $-1 \leq a < 3$
④ $-1 < a \leq 3$ ⑤ $-2 \leq a < 1$

해설

$f(x) = x^3 + (1 - 2a)x^2 + (a^2 - a + 1)x - a$ 라 하면 $f(a) = 0$

이므로

$$f(x) = (x - a) \{x^2 - (a - 1)x + 1\}$$

i) $x = a$ 가 삼중근일 때

$$a^2 - (a - 1)a + 1 = 0 \text{에서 } a = -1 \text{ 여기서, } a = -1 \text{일 때 } x = -1$$

(삼중근)

ii) $x^2 - (a - 1)x + 1 = 0$ 이 허근을 가질 때

$$D = (a - 1)^2 - 4 < 0 \quad \therefore -1 < a < 3$$

i), ii)에서 $-1 \leq a < 3$

28. 서로 다른 세 실수 a, b, c 가 $a^3 - 6a = b^3 - 6b = c^3 - 6c = -1$ 을 만족시킬 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?

- ① 1 ② -1 ③ 3 ④ -3 ⑤ 6

해설

$a^3 - 6a = -1$, $b^3 - 6b = -1$, $c^3 - 6c = -1$ 이므로
 a, b, c 는 삼차방정식 $x^3 - 6x = -1$
즉, $x^3 - 6x + 1 = 0$ 의 세 근이다.
따라서, 근과 계수와의 관계에서 $a + b + c = 0$, $ab + bc + ca = 6$, $abc = -1$
 $\therefore a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
에서 $a + b + c = 0$ 이므로 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 3 \cdot (-1) = -3$

29. $x^{2n} + x^n + 1$ 이 $x^2 + x + 1$ 로 나누어 떨어지는 두 자리의 양의 정수 n 의 개수는?

- ① 45개 ② 50개 ③ 55개 ④ 60개 ⑤ 65개

해설

$x^{2n} + x^n + 1$ 이 $x^2 + x + 1$ 로
나누어 떨어지므로
 $x^{2n} + x^n + 1 = (x^2 + x + 1)Q(x) \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 허근을
 ω 라고 놓으면
 $\omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$ 이다.
 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x = \omega$ 를 대입하면
 $\omega^{2n} + \omega^n + 1 = 0$
(i) $n = 3k$ (k 는 자연수)이면,
 $\omega^n = \omega^{3k} = (\omega^3)^k = 1$
 $\therefore \omega^{2n} + \omega^n + 1 = 1 + 1 + 1 \neq 0$
 $\therefore n \neq 3k$
(ii) $n = 3k + 1$ (k 는 자연수)이면,
 $\omega^n = \omega^{3k+1} = (\omega^3)^k \cdot \omega = \omega$
 $\therefore \omega^{2n} + \omega^n + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0$
(iii) $n = 3k + 2$ (k 는 자연수)이면,
 $\omega^n = \omega^{3k+2} = (\omega^3)^k \cdot \omega^2 = \omega^2$
 $\therefore \omega^{2n} + \omega^n + 1$
 $= (\omega^2)^2 + \omega^2 + 1 = \omega + \omega^2 + 1 = 0$
(ii), (iii)에서 n 은
3의 배수가 아닌 두 자리의 양의 정수이다.
따라서, n 의 개수는 10에서 99까지
90개의 정수 가운데
3의 배수 30개를 제외하면
 $90 - 30 = 60$ (개)이다.

30. 명수, 우빈, 지원이는 각자 그림 1 점씩을 그려 교무실 앞에 나란히 전시해 놓고, 지나가시는 선생님들께 가장 마음에 드는 그림 1 개만 골라 그림 옆 종이에 스티커를 붙여달라고 하였다. 처음에 총 40 개의 스티커가 있었고, 중간 점검 결과 명수는 10 표, 우빈이는 8 표, 지원이는 7 표를 얻었을 때, 남은 스티커의 획득 여부에 관계없이 명수가 가장 많은 스티커를 받으려면 최소 몇 개의 스티커를 더 얻어야 하는지 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 7 개

해설

중간 점검 결과는 $10+8+7=25$ (개) 이므로 남은 스티커 개수는 $40-25=15$ (개) 이다.

명수가 가장 많은 스티커를 얻기 위해 접전을 펼칠 때는 2등인 우빈이와 경쟁할 때이고, 명수가 x 개의 스티커를 얻었다고 가정하면 그로부터 명수가 얻게 되는 스티커의 수의 합이 나머지 $(15 - x)$ 개를 모두 우빈이가 얻는 결과보다도 많으면 무조건 명수는 가장 많은 스티커를 받게 된다. 즉,

$$10 + x > 8 + (15 - x)$$

$$\therefore x > \frac{13}{2}$$

따라서 명수가 가장 많은 스티커를 받는다는 사실이 확정되기 위해서는 최소 7 개의 스티커를 더 얻어야 한다.

31. 자동차 판매회사에 다니는 차세일씨는 기본 연봉 1000 만원에 연간 자동차 판매 금액의 일정 비율을 추가로 지급받기로 하였다. 한 대당 가격이 1000 만원인 자동차를 4 대, 한 대당 가격이 2000 만원인 자동차를 3대 판매할 것으로 예상되고 차세일씨가 연간 받고자 하는 급여의 총액이 1500 만원 이상이라고 할 때 연간 자동차 판매 금액의 최소 몇 % 를 추가로 지급해 달라고 요구해야 하는지 구하여라.(단, 세금은 계산하지 않는다.)

▶ 답: %

▶ 정답 : 5 %

해설

판매 금액의 일정 비율을 $x\%$ 라 하면

판매 금액의 일정 비율을 $x\%$ 라 하면

$$1000 + (1000 \times 4 + 2000 \times 3) \times \frac{x}{100} \geq 1500$$

$$\therefore x \geq 5$$

따라서 차세일씨는 자동차 판매금액의 최소 5%를 추가로 지급해 달라고 요구해야 한다.

32. 560 개의 제품을 적당히 나누어 창고에 보관하려고 한다. 제품을 22 개씩 보관하면 창고가 모자라고 24 개씩 보관하면 모든 제품을 보관할 수 있다. 만약 제품에 불량으로 인해 창고에 보관할 필요가 없게 된 제품이 60 개 발생하면 22 개씩 보관하더라도 창고의 개수를 2 개 더 줄일 수 있다. 창고의 개수를 구하여라.

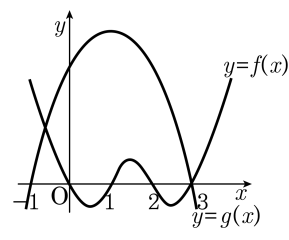
▶ 답 : 개

▷ 정답 : 25 개

해설

창고의 개수를 x 개라 하면
 $22x < 560 < 24x$
 $22(x - 2) \geq 500$
연립하여 계산하면
 $\frac{272}{11} \leq x < \frac{280}{11}$
 $24.72... \leq x < 25.45...$
따라서 창고의 개수는 25 개이다.

33. 사차함수 $f(x)$ 와 이차함수 $g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) \cdot g(x) > 0$ 의 해는?



- ① $x < -1$ 또는 $x > 3$
- ② $0 < x < 1$ 또는 $2 < x < 3$
- ③ $-1 < x < 0$ 또는 $1 < x < 2$
- ④ $x < 0$ 또는 $1 < x < 2$
- ⑤ $0 < x < 1$ 또는 $x > 3$

해설

$f(x) \cdot g(x) > 0$ 이므로
 $f(x) > 0$ 이고 $g(x) > 0$ 또는
 $f(x) < 0$ 이고 $g(x) < 0$ 이므로
 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프가
 모두 x 축 보다 위에 있거나 모두 x 축 보다
 아래에 있을 때이다.
 따라서 $-1 < x < 0$ 과 $1 < x < 2$ 에서
 두 그래프가 모두 x 축 보다 위에 있다.

34. 좌표평면 위의 점 P(4, 9)를 지나고 x 절편과 y 절편, 기울기가 모두 정수인 직선의 개수는 ?

① 4

② 5

③ 6

④ 8

⑤ 9

해설

점 P(4, 9)를 지나는 직선의 기울기를

m 이라 하면

직선의 방정식은 $y - 9 = m(x - 4) \cdots \textcircled{1}$

x 절편 : $\textcircled{1}$ 에 $y = 0$ 을 대입하면

$$-9 = m(x - 4)$$

$$\therefore x = 4 - \frac{9}{m}$$

y 절편 : $\textcircled{1}$ 에 $x = 0$ 을 대입하면

$$y - 9 = -4m$$

$$\therefore y = 9 - 4m$$

따라서 x 절편, y 절편이 모두 정수가 되기 위해서는 m 의 값은 9의 약수(음수 포함)이어야 한다.

따라서 $m = 1, 3, 9, -1, -3, -9$

$\therefore$ 직선은 6개 존재한다.

35. x, y 에 대한 방정식 $xy + x + y - 1 = 0$ 을 만족시키는 정수 x, y 를 좌표평면 위의 점 (x, y) 로 나타낼 때, 이 점들을 꼭지점으로 하는 사각형의 넓이는?

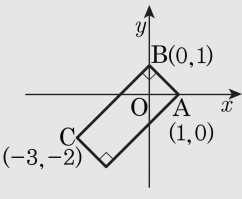
- ① 2
- ② 6
- ③ 8
- ④ $3\sqrt{2}$
- ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$xy + x + y - 1 = 0$ 에서 $(x + 1)(y + 1) = 2 \cdots \textcircled{1}$ 이고, x, y 는 정수이므로

$\textcircled{1}$ 을 만족하는 정수 해를 순서쌍으로 나타내면 $(0, 1), (1, 0), (-2, -3), (-3, -2)$ 이다.

네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 그림과 같다.



사각형 $ABCD$ 는 직사각형이고 넓이는

$$\overline{AB} \times \overline{BC} = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$$