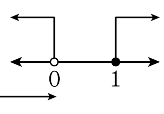
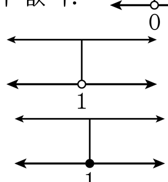
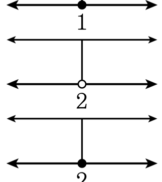
1. 연립부등식 $\begin{cases} 8-3x \le 2 \\ 3x-3 \le 3 \end{cases}$ 의 해를 옳게 구하고 수직선상의 그림을 바르게 그린 것은?

① 해가 없다. 

② 1 , 

③ 1 ,

④ 2 , 

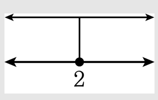
⑤ 2 ,

해설

$\begin{cases} 8-3x \le 2 \\ 3x-3 \le 3 \end{cases}$ 을 정리하면,

$\begin{cases} -3x \le -6 \\ 3x \le 6 \end{cases}$ 이고

간단히 하면 $\begin{cases} x \ge 2 \\ x \le 2 \end{cases}$ 이다.

수직선 위에 그리면 

이 되고 해는 2 이다.

2. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $kx^2-2(k-4)x+2\geq 0$이 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k\leq -2$ ② $-1\leq k\leq 2$ ③ $1\leq k\leq 8$

④ $2\leq k\leq 8$ ⑤ $k\leq 8$

해설

x^2의 계수가 미지수 k이므로

ⅰ) $k=0$일 때 $8x+2\geq 0$에서 $x\geq -\frac{1}{4}$이므로

모든 실수 x에 대하여 성립하는 것은 아니다.

ⅱ) $k\neq 0$일 때 $kx^2-2(k-4)x+2\geq 0$의 해가 모든 실수이려면

$k>0\cdots$ ㉠

$\frac{D}{4}=(k-4)^2-2k\leq 0,\ k^2-10k+16\leq 0,$

$(k-2)(k-8)\leq 0 \quad \therefore 2\leq x\leq 8\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2\leq k\leq 8$

ⅰ), ⅱ)에서 $2\leq k\leq 8$이다.

3. 두 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(-3,\ 4)$를 $3:1$ 로 외분하는 점을 $\mathrm{P}(2,\ -1)$이라고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

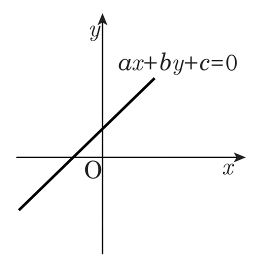
$\mathrm{P}\left(\frac{3\cdot(-3)-1\cdot a}{3-1},\ \frac{3\cdot 4-1\cdot b}{3-1}\right)=\mathrm{P}(2,\ -1)$ 이므로,

$\frac{3\cdot(-3)-1\cdot a}{3-1}=2$, $-9-a=4$, $a=-13$

$\frac{3\cdot 4-1\cdot b}{3-1}=-1$, $12-b=-2$, $b=14$

$\therefore\ a+b=1$

4. 직선 $ax+by+c=0$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $cx+ay+b=0$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?



① 제1사분면

② 제2사분면

③ 제3사분면

④ 제4사분면

⑤ 제1사분면과 제3사분면

해설

$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$ 이므로

주어진 직선의 방정식은 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

기울기 : $-\frac{a}{b} > 0 \quad \therefore\ \frac{a}{b} < 0$

y 절편 : $-\frac{c}{b} > 0 \quad \therefore\ \frac{c}{b} < 0$

두 부등식에서 $\frac{a}{c} > 0$

마찬가지로 일차함수 $cx + ay + b = 0$ 은

$y = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}$,

기울기 : $-\frac{c}{a} < 0$

y 절편 : $-\frac{b}{a} > 0$

이상에서 이 직선은 제3사분면을 지나지 않는다.

5. 세 직선 $2x-y-4=0$, $x-2y-2=0$, $y=ax+2$ 가 오직 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① 2　② 1　③ 0　④ -1　⑤ -2

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지나야 한다.

$2x-y-4=0 \cdots$ ㉠
$x-2y-2=0 \cdots$ ㉡
$y=ax+2 \quad \cdots$ ㉢이라 할 때,

㉠, ㉡의 교점이 ㉢위에 있으면, 한 점에서 만나므로
㉠, ㉡를 연립하여 풀면 $x=2,\ y=0$
두 직선의 교점 $(2,\ 0)$ 이 직선 $y=ax+2$ 를 지나면 한 점에서 만나므로
$0=2a+2,\ 2a=-2$
$\therefore\ a=-1$

6. 27의 세제곱근 중에서 한 허근을 β라 할 때, $\beta^4 + 9\beta^2$의 값은?

① -81 ② -32 ③ -16 ④ 16 ⑤ 32

해설

$\beta^3 = 27$에서 $(\beta - 3)(\beta^2 + 3\beta + 9) = 0$

β는 허근이므로 $\beta^2 + 3\beta + 9 = 0$

$\therefore \ \beta^4 + 9\beta^2 = \beta^3 \times \beta + 9\beta^2 = 27\beta + 9\beta^2$

$= 9(\beta^2 + 3\beta) = 9 \times (-9) = -81$

7. x에 대한 삼차방정식 $x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b의 합 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근을 $1 - \sqrt{2}$, 나머지 한 근을 β라 하면

$\left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right)\beta + \left(1 - \sqrt{2}\right)\beta = 5$

$-1 + 2\beta = 5,\ 2\beta = 6 \quad \therefore\ \beta = 3$

따라서, $a = \left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(1 - \sqrt{2}\right) + 3 = 5$

$b = \left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right) \cdot 3 = -3$이므로

$a + b = 5 + (-3) = 2$

8. x에 대한 두 이차방정식 $x^2+ax+5=0$, $x^2+5x+a=0$이 공통근을 갖는 실수 a의 값들의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

공통근을 p라 하면

$p^2+ap+5=0,\ p^2+5p+a=0$

두 식을 빼면, $(a-5)p=a-5$

$(a-5)(p-1)=0$

$\therefore a=5$ 또는 $p=1$

$p=1$이면, $1+a+5=0,\ a=-6$

$\therefore a$의 합 : $-6+5=-1$

9. 다음 두 부등식을 만족하는 자연수의 개수를 구하여라.

$$\frac{2x+4}{3} \geq \frac{x-2}{2} - x$$
$$0.3(2x-3) \leq 0.2(x+6) + 0.3$$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$\frac{2x+4}{3} \geq \frac{x-2}{2} - x$ 의 양변에 6 을 곱하면

$2(2x+4) \geq 3(x-2) - 6x$ $4x+8 \geq 3x-6-6x$

$x \geq -2$

$0.3(2x-3) \leq 0.2(x+6) + 0.3$ 의 양변에 10 을 곱하면

$3(2x-3) \leq 2(x+6) + 3$

$6x - 9 \leq 2x + 12 + 3$

$x \leq 6$

연립부등식의 해는 $-2 \leq x \leq 6$ 이다. 따라서 만족하는 자연수는 6 개이다.

10. 다음 중 연립부등식 $\frac{1}{5}(x+5)-1<\frac{x-2}{3}+2<\frac{7+x}{2}$ 의 해가 될 수 없는 것은?

① -13　② -9　③ 0　④ 3　⑤ 5

해설

i) $\frac{1}{5}(x+5)-1<\frac{x-2}{3}+2$

$3x+15-15<5x-10+30$

$-2x<20$

$x>-10$

ii) $\frac{x-2}{3}+2<\frac{7+x}{2}$

$2x-4+12<21+3x$

$x>-13$

i), ii) 에서 공통된 범위의 해를 구하면 $x>-10$ 이다.
따라서 $x=-13$ 일 때, $-13<-10$ 이므로 $x=-13$ 은 해가 될 수 없다.

11. 다음 네 개의 부등식을 두 개씩 연립하였을 때의 해를 A, B, C 라고 할 때, 해가 <u>없는</u> 것을 모두 골라라.

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{-\frac{3}{2}(x+1) > 6}\\ \boxed{2(x+2) > -(x+5)}\end{array}\right\} \text{A}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{2(x+2) > -(x+5)}\\ \boxed{2(x+5) \leq 4}\end{array}\right\} \text{B}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{2(x+5) \leq 4}\\ \boxed{3(x+3) \geq 2x+11}\end{array}\right\} \text{C}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : A

▷ 정답 : B

▷ 정답 : C

해설

$-\frac{3}{2}(x+1) > 6$

$-3x - 3 > 12$

$-3x > 15$

$x < -5$

$2(x+2) > -(x+5)$

$2x + 4 > -x - 5$

$3x > -9$

$x > -3$

$2(x+5) \leq 4$

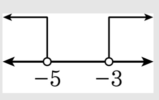
$x + 5 \leq 2$

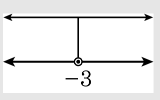
$x \leq -3$

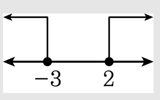
$3(x+3) \geq 2x + 11$

$3x + 9 \geq 2x + 11$

$x \geq 2$

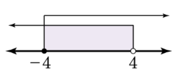
A 

B 

C 

A 는 해가 없다.
B 는 해가 없다.
C 는 해가 없다.

12. 연립부등식 $\begin{cases} -4x - 15 \le 1 \\ 3x + a < x \end{cases}$ 의 해가 다음과 같을 때, a 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

해는 $-4 \le x < 4$ 이다.

$-4x - 15 \le 1$

$-4x \le 16$

$x \ge -4$ 이므로

$3x + a < x$ 의 해는 $x < 4$ 이다.

$2x < -a, \;\; x < -\dfrac{a}{2}$

$-\dfrac{a}{2} = 4 \;\; \therefore \;\; a = -8$

13. 두 부등식 $x^2 - 4x - 5 < 0$, $x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a < 0$을 동시에 만족하는 x의 값이 존재하도록 하는 정수 a의 개수는?

① 5개　② 6개　③ 7개　④ 8개　⑤ 9개

해설

$x^2 - 4x - 5 < 0$에서
$(x-5)(x+1) < 0$이므로
$-1 < x < 5$
$x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a < 0$에서
$x^2 - 2(a+1)x + a(a+2)$
$= (x-a)(x-a-2) < 0$이므로
$a < x < a+2$
두 부등식의 공통부분이 있어야 하므로
$a + 2 > -1$
즉 $a > -3$또는 $a < 5$에서
$-3 < a < 5$
따라서 정수 a의 개수는 7개다.

14. 두 정점 A$(-1,\ 2)$, B$(3,\ 0)$으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는?

① $y=2x^2-x$ ② $x^2+y^2=1$ ③ $y=2x-1$
④ $y=2x$ ⑤ $y=x+1$

해설

구하는 자취 위의 점을 P$(x,\ y)$ 라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$ 로부터
$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $8x-4y-4=0$
$\therefore\ y=2x-1$

15. 두 점 A$(1,1)$, B$(4,3)$에 대하여 점 P가 x축 위의 점 일때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은?

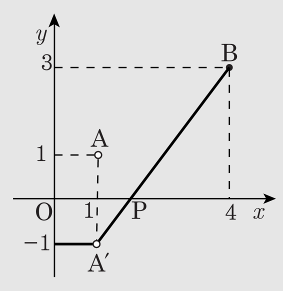
① 5　② $2\sqrt{2}$　③ $4\sqrt{2}$　④ $8\sqrt{2}$　⑤ 8

해설

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 A $(1,1)$을 x축에 대해 대칭이동시킨 A$'(1,\ -1)$과 B $(4,3)$을 잇는 선분의 길이와 같다.

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A'B}}$이므로

$\overline{\mathrm{A'B}} = \sqrt{(4-1)^2+(3+1)^2} = \sqrt{25}=5$



16. 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표가 G(2, −1) 이고 세 변 AB, BC, CA 를 2 : 1 로 내분하는 점이 각각 P$(a, 3)$, Q$(-2, -2)$, R$(5, b)$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : −1

해설

삼각형 ABC 의 무게중심과 삼각형 PQR 의 무게중심은 일치한다.

삼각형 PQR 의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{a-2+5}{3}, \frac{3-2+b}{3}\right)$ 이므로

$\frac{a+3}{3} = 2$ 에서 $a = 3$

또 $\frac{1+b}{3} = -1$ 에서 $b = -4$

$\therefore\ a+b = -1$

17. 세 점 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,2)$ 에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 이 최소가 되도록 점 P 의 좌표를 정하면?

① $P\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$　② $P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3}\right)$　③ $P\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$　⑤ $P\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

해설

$P(x,\ y)$ 라 두면
$x^2+y^2+(x-1)^2+y^2+(x-1)^2+(y-2)^2$
$=3x^2-4x+3y^2-4y+6$
$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$
$\therefore P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ 일 때 최소
※ 점 P 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이 된다.
$\left(\frac{0+1+1}{3},\ \frac{0+0+2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

18. 두 직선 $x-3y+5=0$, $x+9y-7=0$ 의 교점을 지나고, x 축의 양의 방향과 $30°$ 의 각을 이루는 직선의 방정식이 $x+by+c=0$ 일 때 $b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 식을 연립하여 풀면 두 직선의 교점의 좌표는 $(-2,\ 1)$ 이고, 기울기는 $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y-1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$

$\therefore x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} + 2 = 0$

$\therefore b = -\sqrt{3},\ c = 2 + \sqrt{3} \quad \therefore\ b+c = 2$

19. 어느 회사가 판매하고 있는 상품의 1개당 판매 가격을 작년보다 x% 올리면 이 상품의 판매량이 작년보다 $\frac{x}{2}$% 감소한다고 한다. 이 회사가 올해 판매 금액의 10% 를 상여금으로 지급할 때, 올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액이 작년 판매 금액보다 크거나 같게 되기 위한 x 의 최댓값은?

① 60 ② $\frac{200}{3}$ ③ $\frac{230}{3}$ ④ 80 ⑤ 90

해설

이 회사가 판매하는 상품의 작년 1개당 판매 가격을 a, 판매량을 b라 하자.
올해 판매 가격을 x% 올리면
올해 판매 가격은 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$,
판매량은 $b\left(1-\frac{x}{200}\right)$ 이므로
올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액은
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\times\frac{9}{10}$
작년 판매 금액이 ab 이므로
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\times\frac{9}{10}\geq ab$
이 부등식을 정리하면
$9x^2-900x+20000\leq 0$
$(3x-100)(3x-200)\leq 0$
$\therefore \frac{100}{3}\leq x\leq\frac{200}{3}$

20. 원점에서 직선 $(a-1)x+(a+3)y-4=0$ 에 이르는 거리를 $f(a)$ 라 할 때, $f(a)$ 의 최댓값은? (단, a 는 상수)

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ 2　　④ $2\sqrt{2}$　　⑤ 4

해설

$$f(a)=\frac{|-4|}{\sqrt{(a-1)^2+(a+3)^2}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{2a^2+4a+10}}$$

이 때, $f(a)$ 의 값이 최대가 되려면 분모가 최소이어야 한다.

$2a^2+4a+10=2(a^2+2a)+10=2(a+1)^2+8$

즉, 분모의 최솟값은 $\sqrt{8}$ 이므로

$f(a)$ 의 최댓값은 $\therefore \dfrac{4}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}$