

1. $\frac{2-i}{2+i} + \frac{2+i}{2-i}$ 를 간단히 하면? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① $\frac{6}{5}$

② 2

③ $\frac{8}{5}$

④ $\frac{8}{3}$

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\frac{2-i}{2+i} + \frac{2+i}{2-i} &= \frac{(2-i)^2 + (2+i)^2}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{3+3}{5} = \frac{6}{5}\end{aligned}$$

2. 자연수 n 에 대해 $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$ 라 하자. x 가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

① $2i$

② $-2i$

③ 0

④ 2

⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} x &= \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i} \right)^2 \right\}^n + \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i} \right)^2 \right\}^n \\ &= \left(\frac{2}{2i} \right)^n + \left(\frac{2}{-2i} \right)^n \\ &= \left(\frac{1}{i} \right)^n + \left(-\frac{1}{i} \right)^n = (-i)^n + i^n \end{aligned}$$

i^n 은 $n = 4k$, $n = 4k + 1$, $n = 4k + 2$, $n = 4k + 3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n = 4k$ 이면 $x = 1 + 1 = 2$

(ii) $n = 4k + 1$ 이면 $x = -i + i = 0$

(iii) $n = 4k + 2$ 이면 $x = -1 - 1 = -2$

(iv) $n = 4k + 3$ 이면 $x = i - i = 0$

$\therefore x = 2, 0, -2$

따라서, x 가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

3. 복소수 α, β 는 $\alpha\bar{\alpha} = 1, \beta\bar{\beta} = 1$ 을 만족하고 $\alpha + \beta = i$ 이다. 이 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① 4

② 3

③ 2

④ 1

⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$$\alpha + \beta = i \text{에서 } \overline{\alpha + \beta} = \bar{i} \quad \therefore \bar{\alpha} + \bar{\beta} = -i$$

$$\alpha\bar{\alpha} = 1, \beta\bar{\beta} = 1 \text{에서 } \bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \bar{\beta} = \frac{1}{\beta}$$

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \quad \therefore \alpha\beta = -1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = i^2 - 2 \cdot (-1) = 1$$

4. 두 복소수 $z_1 = a + (3b - 1)i$, $z_2 = (b + 1) - 5i$ 에 대하여 $z_1 = \bar{z}_2$ 가 성립할 때, 실수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$a + (3b - 1)i = (b + 1) + 5i \text{에서}$$

$$\begin{cases} a = b + 1 \\ 3b - 1 = 5 \end{cases} \quad \text{이므로 연립하면}$$

$$a = 3, b = 2$$

$$\therefore a + b = 5$$

5. 이차방정식 $x^2 + (k - 4)x + k - 1 = 0$ 이 중근을 가지도록 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,

$D = 0$ 일 때 중근을 가지므로

$$D = (k - 4)^2 - 4(k - 1) = k^2 - 12k + 20 = 0 \text{ 에서}$$

$$(k - 2)(k - 10) = 0$$

따라서, $k = 2$, $k = 10$ 이므로 k 의 값은 12이다.

6. 자연수 n 에 대하여 이차방정식 $n(n+1)x^2 - x + 2006 = 0$ 의 두 근을 α_n, β_n 이라할 때, $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2006}) + (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{2006})$ 의 값은?

- ① $\frac{2004}{2006}$ ② $\frac{2005}{2006}$ ③ $\frac{2006}{2007}$ ④ $\frac{2007}{2008}$ ⑤ $\frac{2007}{2009}$

해설

$n(n+1)x^2 - x + 2006 = 0$ 의 두 근이 α_n, β_n 이므로

$$\alpha_n + \beta_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{준식} = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \cdots + (\alpha_{2006} + \beta_{2006})$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2006} - \frac{1}{2007}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2007} = \frac{2006}{2007}$$

7. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + a + 1 = 0$ 의 두 근이 연속인 정수가 되게하는 상수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 근을 $n, n+1$ 이라 하면

$$\begin{cases} n + (n+1) = a \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ n(n+1) = a+1 \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } n = \frac{a-1}{2} \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉢}$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면

$$\frac{a-1}{2} \left(\frac{a-1}{2} + 1 \right) = a+1$$

이것을 정리하면 $(a+1)(a-5) = 0$

$$a = -1, 5$$

$$\therefore -1 + 5 = 4$$

8. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta = 4$ 이다. 방정식 $f(4x - 2) = 0$ 의 두 근의 합은?

① 2

② -2

③ 4

④ -4

⑤ 0

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 $x = \alpha$ 또는 $x = \beta$ 라 하면

$f(4x - 2) = 0$ 에서 $4x - 2 = \alpha$ 또는 $4x - 2 = \beta$

$$x = \frac{\alpha + 2}{4} \quad \text{또는} \quad x = \frac{\beta + 2}{4}$$

즉, $f(4x - 2) = 0$ 의 두 근은 $\frac{\alpha + 2}{4}, \frac{\beta + 2}{4}$ 이다.

$$\therefore \frac{\alpha + 2}{4} + \frac{\beta + 2}{4} = \frac{\alpha + \beta + 4}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

9. 이차식 $x^2 + 2x + 4$ 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$

② $(x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3})$

③ $(x + 1 - \sqrt{2}i)(x + 1 + \sqrt{2}i)$

④ $(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$

⑤ $(x - 1 - \sqrt{2}i)(x - 1 + \sqrt{2}i)$

해설

$x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 해를 구하면

$$x = -1 \pm \sqrt{1 - 4} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\therefore x^2 + 2x + 4$$

$$= \{x - (-1 + \sqrt{3}i)\} \{x - (-1 - \sqrt{3}i)\}$$

$$= (x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$$

10. 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 4 = 0$ 에서 한 근만이 양이기 위한 a 의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a \leq 0$

② $0 < a \leq 1$

③ $1 < a \leq 2$

④ $-2 < a \leq 2$

⑤ $-1 < a \leq 2$

해설

(i) $\alpha > 0, \beta < 0$ 일 때, $\alpha\beta = a^2 - 4 < 0$

$$\therefore -2 < a < 2$$

(ii) $\alpha > 0, \beta = 0$ 일 때,

$$\alpha + \beta = a > 0, \alpha\beta = a^2 - 4 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

(i), (ii)에서 $-2 < a \leq 2$

11. 이차함수 $y = 2x^2 - mx + 3$ 과 직선 $y = 2x + 1$ 이 접할 때, 양수 m 의 값은?

① 2

② 3

③ 5

④ 6

⑤ 8

해설

이차함수와 직선이 접하면 두 방정식을 연립했을 때 판별식이 0 이다.

$$\begin{cases} y = 2x^2 - mx + 3 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - mx + 3 = 2x + 1$$

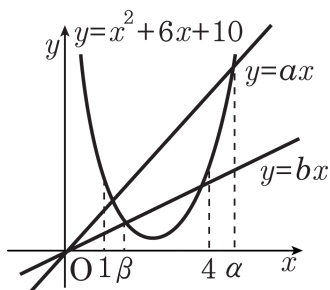
$$\Rightarrow 2x^2 - (m + 2)x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow D = (m + 2)^2 - 16 = 0$$

$$m = 2, -6$$

$$\therefore m = 2 (\because m > 0)$$

12. 다음 그림과 같이 $y = x^2 - 6x + 10$ 의 그래프가 직선 $y = ax$ 와 만나는 두 교점이 x 좌표가 각각 1, α 이고 직선 $y = bx$ 와 만나는 두 교점의 x 좌표가 각각 β , 4 일 때, $\frac{a}{b} + \frac{\alpha}{\beta}$ 의 값을 구하시오.



▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\text{방정식 } x^2 - 6x + 10 = ax$$

즉, $x^2 - (a + 6)x + 10 = 0$ 의 두 근이 1, α 이므로

$$1 + \alpha = a + 6$$

$$1 \cdot \alpha = 10$$

$$\therefore \alpha = 10, a = 5$$

$$\text{방정식 } x^2 - 6x + 10 = bx$$

즉, $x^2 - (b + 6)x + 10 = 0$ 의 두 근이 β , 4 이므로

$$\beta + 4 = b + 6$$

$$4 \cdot \beta = 10$$

$$\therefore \beta = \frac{5}{2}, b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{a}{b} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{\frac{1}{2}} + \frac{10}{\frac{5}{2}} = 10 + 4 = 14$$

13. 세 실수 x, y, z 에 대하여 $\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{3} = z-2$ 일 때, $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{379}{50}$

해설

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{3} = z-2 = k \text{ 라 하면}$$

$$x+2 = 2k, y+1 = 3k, z-2 = k$$

이를 $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$ 에 대입하면

$$(5k-3)^2 + (4k+1)^2 + (3k)^2$$

$$= 50k^2 - 22k + 10$$

$$= 50 \left(k - \frac{11}{50} \right)^2 + \frac{379}{50}$$

따라서 $k = \frac{11}{50}$ 일 때, 최솟값이 $\frac{379}{50}$ 이다.

14. 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$ 의 최솟값은 -5 보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② $-\frac{3}{8}$

③ $\frac{3}{8}$

④ 3

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 8x + 3a - 4 \\&= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3a - 4 \\&= 2(x - 2)^2 - 12 + 3a\end{aligned}$$

$y = 2(x - 2)^2 - 12 + 3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지나므로

$$8a + 5 = 2(2a - 2)^2 - 12 + 3a$$

$$8a^2 - 21a - 9 = 0, (8a + 3)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{8} \text{ 또는 } 3$$

그런데 최솟값 $-12 + 3a > -5$ 이므로

i) $a = -\frac{3}{8}$ 대입 :

$$-12 + 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -12 - \frac{9}{8} = -\frac{105}{8} < -5$$

ii) $a = 3$ 대입 : $-12 + 3 \times 3 = -12 + 9 = -3 > -5$

따라서 $a = 3$ 이다.

15. $-1 \leq x \leq 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x - 1)^2 + 1$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 점(1, 1) 을 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.

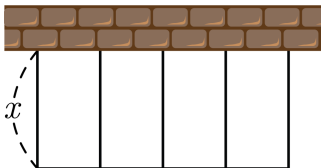
그러므로 $-1 \leq x \leq 4$ 의 범위에서

최솟값은 $x = 1$ 일 때 1 이고,

최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10 이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

16. 60m 의 철망으로 다음 그림과 같이 담장을 이용하여 똑같은 크기의 직사각형 모양의 담장을 4 개 만들려고 한다. 4 개의 담장의 넓이의 합의 최댓값은?



① 140m^2

② 160m^2

③ 180m^2

④ 200m^2

⑤ 240m^2

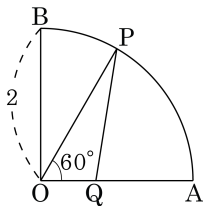
해설

담장 한 개의 가로 길이는 $\frac{60-5x}{4}$

담장의 넓이의 합은 $x \left(\frac{60-5x}{4} \right) \times 4 = x(60-5x)$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore -5x^2 + 60x &= -5(x^2 - 12x + 36) + 180 \\ &= -5(x-6)^2 + 180 \end{aligned}$$

17. 반지름의 길이가 2 인 사분원 OAB 의 호 AB 위에 $\angle AOP = 60^\circ$ 가 되도록 점 P 를 정한다. 이 때, 선분 OA 위를 움직이는 점 Q 에 대하여 $\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2$ 의 최솟값은?



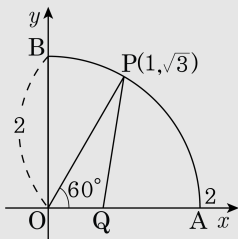
① $\frac{13}{4}$
④ $\frac{17}{4}$

② $\frac{7}{2}$
⑤ $\frac{9}{2}$

③ $\frac{15}{4}$

해설

아래 그림과 같이 좌표평면을 도입하여 생각해 보면



$A(2,0), B(0,2), P(1, \sqrt{3})$ 이 된다.

이 때, $Q(x, 0)$ 로 놓으면 ($0 < x < 2$)

$$\begin{aligned}\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2 &= x^2 + (x-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 2x^2 - 2x + 4 = \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서, $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2$ 은

최솟값 $\frac{7}{2}$ 을 갖는다.

18. 지면으로부터 초속 40m 로 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 x 초 후의 높이를 y m 라고 하면 $y = -5x^2 + 40x$ 의 관계가 성립한다. 이 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그 때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : 초

▶ 답 : m

▷ 정답 : 4초

▷ 정답 : 80m

해설

$y = -5x^2 + 40x$ 에서 $y = -5(x - 4)^2 + 80$ 이다.
따라서 $x = 4$ 일 때, y 는 최댓값 80을 갖는다.

19. 다음 방정식의 해가 아닌 것은?

$$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$$

① -3

② -2

③ -1

④ 1

⑤ 2

해설

$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$ 에서 $x^2 + x = X$ 라 하면

$$X^2 - 8X + 12 = 0, (X - 2)(X - 6) = 0$$

$\therefore X = 2$ 또는 $X = 6$

(i) $X = 2$ 일 때, $x^2 + x = 2$ 에서

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = -2$

(ii) $X = 6$ 일 때, $x^2 + x = 6$ 에서

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x = -3$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 2$

따라서, 해가 아닌 것은 ③

20. 사차방정식 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 4x - 5 = 0$ 의 두 근이 1, -1일 때, 나머지 두 근의 곱은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & x^4 + ax^3 + bx^2 + 4x - 5 \\ &= (x-1)(x+1)(x^2 + tx + s) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + tx + s) \end{aligned}$$

$$\therefore t = a, s - 1 = b, -t = 4, -s = -5$$

$$t = -4, s = 5 \text{ 이므로 } a = -4, b = 4 \text{ 이고,}$$

나머지 두 근의 곱은 s 이므로 5이다.

21. 한 근이 $1 + \sqrt{3}i$ 인 방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 과 방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 이 오직 한 개의 공통 실근을 가질 때, $a - b + c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 실수)

① -14

② -13

③ -12

④ -11

⑤ -9

해설

$1 + \sqrt{3}i$ 가 근이므로 $1 - \sqrt{3}i$ 도 근이다. 이때, 또 한 근을 α 라 하면 근과 계수 관계에서

$$(1 + \sqrt{3}i) + (1 - \sqrt{3}i) + \alpha = -a \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) + (1 + \sqrt{3}i)\alpha + (1 - \sqrt{3}i)\alpha = b \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)\alpha = -c \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

또, 방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 과의 공통근이 α 이므로

$$\alpha^2 + a\alpha + 2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

㉠에서 $\alpha = -a - 2$ 를 ㉣에 대입하면

$$(-a - 2)^2 + a(-a - 2) + 2 = 0$$

$$\therefore a = -3, \alpha = 1$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } b = 2\alpha + 4 = 6$$

$$\textcircled{㉢} \text{에서 } c = -4\alpha = -4$$

$$\therefore a - b + c = -3 - 6 - 4 = -13$$

22. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = -4 \end{cases}$ 의 해를 $x = a, y = b$ 라 할 때,

다음 중 a 또는 b 의 값이 될 수 없는 것은?

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

② $\frac{1}{3}$

③ $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

④ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

⑤ -1

해설

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \cdots ① \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = -4 \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $(x+y)(x+2y) = 0, x = -y, x = -2y$

i) $x = -y$ 를 ②에 대입하면 $y^2 = 1$

$\therefore y = \pm 1, x = \mp 1$ (복호동순)

ii) $x = -2y$ 를 ②에 대입하면 $y^2 = \frac{4}{3}$

$\therefore y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}, x = \mp \frac{4\sqrt{3}}{3}$ (복호동순)

그러므로 x, y 값이 될 수 없는 것은 $\frac{1}{3}$

23. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x,y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $y = -x + 2a$ 를 ②에 대입하면

$$x(-x + 2a) = a$$

$\therefore -x^2 + 2ax = a$ 즉 $x^2 - 2ax + a = 0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4 = a^2 - a = 0$

$\therefore a = 0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$$a = 1$$

24. 다음 방정식을 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.

$$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

해설

$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$ 에서 $x^2y^2 + 4x^2 + y^2 + 4 - 8xy = 0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면

$$(x^2y^2 - 4xy + 4) + (4x^2 - 4xy + y^2) = 0$$

이 때, x, y 가 실수이므로 $xy - 2, 2x - y$ 도 실수이다.

$$\therefore xy - 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{7},$$

$$2x - y = 0 \quad \cdots \textcircled{8}$$

⑧에서 $y = 2x$ 이고, 이것을 ⑦에 대입하면 $x^2 = 1$

따라서, $x = 1$ 일 때 $y = 2$, $x = -1$ 일 때 $y = -2$

그러므로 x, y 의 값은 $x = \pm 1, y = \pm 2$ (복부호 동순)

따라서 x, y 의 합은 $-3, 3$

25. $\frac{x^2 - y^2 - 1}{x - y} = 6$ 을 만족시키는 자연수 x, y 값의 순서쌍의 개수는?

▶ 답: 개

▷ 정답: 2개

해설

$$\frac{x^2 - y^2 - 1}{x - y} = 6 \text{ 에서}$$

$$\frac{(x - y)(x + y) - 1}{x - y} = (x + y) + \frac{-1}{x - y} = 6$$

$x - y$ 는 -1 의 약수이다. 즉 -1 또는 1

i) $x - y = 1$ 일 때, $x + y = 7$

$$\therefore x = 4, y = 3$$

ii) $x - y = -1$ 일 때, $x + y = 5$

$$\therefore x = 2, y = 3$$

따라서 구하는 $(x, y) = (4, 3), (2, 3)$ 이므로
2 개이다.