

1. 다음 보기에서 이차방정식의 개수는?

보기

- ㉠ $2x^2 - 5 = x^2$
- ㉡ $x^2 = -x + 2$
- ㉢ $x^2 = 0$
- ㉣ $x^2 = (x-1)^2 + x^2$
- ㉤ $x(x^2 + 1) = x^3 + x^2 - 1$
- ㉥ $2x^2 - 5x - 1 = 2(x^2 - 1)$

- ① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

이차방정식은 (x 에 관한 이차식) $= 0$ 꼴의 등식이다.
 \therefore ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉥ 5개

2. 이차방정식 $5x^2 - bx + 20 = 0$ 의 한 근을 a 라고 할 때, $5a^2 - ab + 1$ 의 값은?

- ① -20 ② -19 ③ -18 ④ -17 ⑤ -16

해설

$5x^2 - bx + 20 = 0$ 에 $x = a$ 를 대입하면

$5a^2 - ab + 20 = 0$, $5a^2 - ab = -20$

$\therefore 5a^2 - ab + 1 = (-20) + 1 = -19$

3. 다음 방정식의 공통근을 구하여라.

$$\begin{aligned}8x^2 + 14x - 15 &= 0 \\ 2x^2 - 3x - 20 &= 0\end{aligned}$$

▶ 답:

▷ 정답: $x = -\frac{5}{2}$

해설

$$\begin{aligned}8x^2 + 14x - 15 &= 0 \\ (2x + 5)(4x - 3) &= 0 \\ \therefore x = -\frac{5}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{4} \\ 2x^2 - 3x - 20 &= 0 \\ (2x + 5)(x - 4) &= 0 \\ \therefore x = -\frac{5}{2} \text{ 또는 } x = 4 \\ \text{따라서 공통근은 } x = -\frac{5}{2} \text{ 이다.}\end{aligned}$$

4. 이차방정식 $(x+3)^2 = k-1$ 이 중근 a 를 갖는다고 할 때, $k-a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $k-a=4$

해설

중근을 가지려면 (완전제곱식)=0 꼴이어야 하므로

$$k-1=0$$

$$\therefore k=1$$

$$(x+3)^2=0 \text{ 이므로 } x=-3$$

$$\therefore a=-3$$

$$\therefore k-a=1-(-3)=4$$

5. 이차방정식 $x^2 - 6x + 3 - k = 0$ 이 중근을 가질 때, 이차방정식 $-\frac{1}{3}kx^2 - 6x + 4 = 0$ 의 두 근의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^2 - 6x + 3 - k = 0$ 이 중근을 가지므로

$3 - k = 9, k = -6$ 이다.

$-\frac{1}{3}kx^2 - 6x + 4 = 0$ 에 $k = -6$ 을 대입하면

$2x^2 - 6x + 4 = 0$

$2(x - 1)(x - 2) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = 2$

따라서 두 근의 곱은 $1 \times 2 = 2$ 이다.

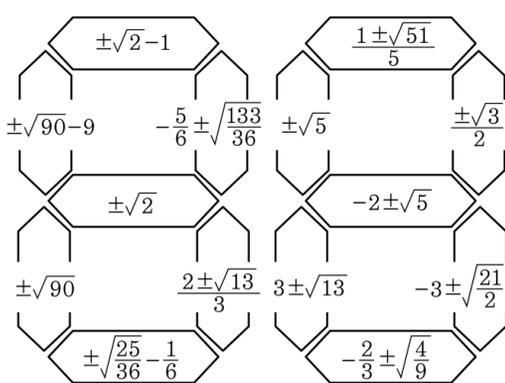
6. 이차방정식 $3(x+2)^2 = 6$ 의 두 근의 합을 구하면?

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$$\begin{aligned} 3(x+2)^2 &= 6 \\ (x+2)^2 &= 2 \\ x+2 &= \pm\sqrt{2} \\ \therefore x &= -2 \pm \sqrt{2} \\ \therefore (-2 + \sqrt{2}) + (-2 - \sqrt{2}) &= -4 \end{aligned}$$

7. 이차방정식을 풀고 다음 그림에서 해를 찾아 색칠한 후 완성되는 두 자리의 숫자를 써라.



- (1) $x^2 - 5 = 0$
 (2) $3 - 4x^2 = 0$
 (3) $x^2 - \frac{2}{5}x - 2 = 0$
 (4) $2x^2 + 12x - 3 = 0$
 (5) $2(x^2 - 1) = 7 - 5x - x^2$
 (6) $3x^2 - 5 = -2(1 - 2x)$

▶ 답:

▷ 정답: 17

해설

- (1) $x = \pm\sqrt{5}$
 (2) 양변을 4로 나누면 $x^2 = \frac{3}{4}$ 이므로
 $\therefore x = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$
 (3) $x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25} = 2 + \frac{1}{25}$
 $\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{51}{25}, x - \frac{1}{5} = \frac{\pm\sqrt{51}}{5}$
 $\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{51}}{5}$
 (4) 양변을 2로 나누면 $x^2 + 6x - \frac{3}{2} = 0$,
 $x^2 + 6x + 9 = \frac{3}{2} + 9, (x+3)^2 = \frac{21}{2}$
 $\therefore x = -3 \pm \sqrt{\frac{21}{2}}$
 (5) 양변을 3으로 나누면
 $x^2 + \frac{5}{3}x = 3, x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = 3 + \frac{25}{36}$
 $\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{133}{36}$
 $\therefore x = -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{133}{36}}$
 (6) 양변을 3으로 나누면
 $x^2 - \frac{4}{3}x = 1, x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = 1 + \frac{4}{9}$
 $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{13}{9}$
 $\therefore x = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3}$

8. 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 $\frac{ax^2 + 2x + b}{5x^2 - cx + 3} = 4$ 이라 한다. 이 때, abc 의 값은?

- ① 100 ② 120 ③ 240 ④ -120 ⑤ -100

해설

$$\frac{ax^2 + 2x + b}{5x^2 - cx + 3} = 4 \text{ 를 정리하면,}$$

$$(a - 20)x^2 + (2 + 4c)x + b - 12 = 0$$

이 식이 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 성립하므로 x 에 대한
항등식이다.

$$\text{따라서 } a - 20 = 0, 2 + 4c = 0, b - 12 = 0$$

$$\therefore a = 20, b = 12, c = -\frac{1}{2}$$

$$abc = 20 \times 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -120$$

9. 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a + b + c$ 의 값은?

$$\frac{ax^2 - 3x - b}{4x^2 + cx - 5} = 2$$

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ $\frac{33}{2}$

해설

$\frac{ax^2 - 3x - b}{4x^2 + cx - 5} = 2$ 를 정리하면,

$$(a - 8)x^2 + (-3 - 2c)x - b + 10 = 0$$

이 식이 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 성립하므로 x 에 대한
항등식이다.

$$\text{따라서 } a - 8 = 0, \quad -3 - 2c = 0, \quad -b + 10 = 0$$

$$\therefore a = 8, \quad b = 10, \quad c = -\frac{3}{2}$$

$$a + b + c = \frac{33}{2} \text{이다.}$$

10. $5x + 2 \leq 4x + 5$ 이고 x 는 자연수 일 때, 다음 이차방정식을 풀면?

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

- ① $x = 1, x = 3$ ② $x = 1, x = 5$ ③ $x = 1$
④ $x = 2, x = 3$ ⑤ $x = 2, x = 5$

해설

$5x + 2 \leq 4x + 5$ 에서 $x \leq 3$ 이다.
따라서 x 의 값은 1, 2, 3이다.
 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 를 만족하는 x 의 값은 $x = 1, x = 5$ 이므로
이차방정식의 해는 $x = 1$ 이다.

11. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 한 근이 m 일 때, $\frac{m^2}{1+2m} - \frac{6m}{1-m^2}$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} &\text{이차방정식 } x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ 에 } x = m \text{ 을 대입하면,} \\ &m^2 - 2m - 1 = 0 \\ &1 + 2m = m^2, 1 - m^2 = -2m \\ &\therefore \frac{m^2}{1+2m} - \frac{6m}{1-m^2} = \frac{m^2}{m^2} - \frac{6m}{-2m} = 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

12. 다음 중 $\left(\frac{7}{3}x - 14\right)(2y + 8) = 0$ 을 만족하는 것의 개수는?

- | | |
|--|---|
| <input type="radio"/> ㉠ $x = 6, y = -4$ | <input type="radio"/> ㉡ $x = 6, y = 4$ |
| <input type="radio"/> ㉢ $x = -6, y = -4$ | <input type="radio"/> ㉣ $x = -6, y = 4$ |
| <input type="radio"/> ㉤ $x = 4, y = 6$ | <input type="radio"/> ㉥ $x = -4, y = 6$ |

- ① 한 개도 없다. ② 2개 ③ 3개
④ 5개 ⑤ 6개

해설

$\frac{7}{3}x - 14 = 0$ 또는 $2y + 8 = 0$ 이므로
 $x = 6$ 또는 $y = -4$ 인 것을 찾으면
 $x = 6$ 인 것은 ㉠, ㉡
 $y = -4$ 인 것은 ㉠, ㉢
따라서 만족하는 것의 개수는 ㉠, ㉡, ㉢이므로
3개이다.

13. 이차방정식 $(x-1)(x-b) = -1$ 이 0이 아닌 중근 a 를 가진다. 이때, b 의 값은? (단, a, b 는 정수)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$(x-1)(x-b) = -1$ 이 중근 a 를 가지므로

x 에 a 를 대입하면

$$(a-1)(a-b) = -1$$

i) $a-1 = -1, a-b = 1$ 인 경우

$$a = 0, b = -1, a \neq 0 \text{이므로 부적합}$$

ii) $a-1 = 1, a-b = -1$ 인 경우

$$a = 2, b = 3$$

$$\therefore b = 3$$

14. 이차방정식 $\frac{1}{3}x^2 - 2x + m = 0$ 을 $\frac{1}{3}(x+n)^2 = -6$ 의 꼴로 나타낼 때,

mn 의 값은?

- ① 21 ② -21 ③ 27 ④ -27 ⑤ -9

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(x^2 - 6x) &= -m, \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 9) - 3 = -m \\ \frac{1}{3}(x-3)^2 &= -m + 3 \\ \therefore m &= 9, n = -3 \\ \therefore mn &= -27\end{aligned}$$

15. 다음 이차방정식 $x^2 - 2ax + a^2 - 10 = 0$ 의 해가 $x = 7 \pm \sqrt{b}$ 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 70

해설

$$x^2 - 2ax = -a^2 + 10$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = -a^2 + 10 + a^2 = 10$$

$$(x - a)^2 = 10 \text{ 이므로}$$

$$x - a = \pm \sqrt{10}$$

$$\therefore x = a \pm \sqrt{10}$$

따라서 $a = 7$, $b = 10$ 이므로 $ab = 70$ 이다.

16. 이차방정식 $x^2 - 2ax + b = 0$ 의 근이 $x = 1 \pm 2\sqrt{5}$ 일 때, 상수 a, b 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -18$

해설

$x^2 - 2ax + b = 0$ 에서
 $x^2 - 2ax = -b, x^2 - 2ax + a^2 = -b + a^2$
 $(x - a)^2 = -b + a^2, (x - a) = \pm \sqrt{-b + a^2}$
 $\therefore x = a \pm \sqrt{-b + a^2} = 1 \pm 2\sqrt{5}$
따라서 $a = 1, a$ 값을 대입하면
 $\sqrt{1 - b} = \sqrt{20}$
 $\therefore b = -19$
따라서 $a + b = -18$ 이다.

17. 이차방정식 $(x-1)^2 = 3-k$ 의 근에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $k = -6$ 이면 근이 2개이다.
- ② $k = -1$ 이면 정수인 근을 갖는다.
- ③ $k = 0$ 이면 무리수인 근을 갖는다.
- ④ $k = 1$ 이면 근이 1개이다.
- ⑤ $k = 3$ 이면 중근을 갖는다.

해설

$$(x-1)^2 = 3-k, x-1 = \pm\sqrt{3-k}$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{3-k}$$

음수의 제곱근은 존재하지 않으므로 근호 안에 있는 수는 음수가 될 수 없다.

$3 > k$: 근이 0개

$k = 3$: 근이 1개

$3 < k$: 근이 2개

18. x 에 관한 이차방정식 $ax^2 + px + ap + q = 0$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 $x = 2$ 의 근을 가질 때, $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x = 2$ 를 대입하면
 $4a + 2p + ap + q = 0$
 $(4 + p)a + 2p + q = 0$
 a 의 값에 관계없이 항상 성립하므로
 $4 + p = 0, 2p + q = 0$
 $p = -4, 2p + q = 0, q = 8$
 $\therefore p + q = -4 + 8 = 4$

19. $a^2x + 2ax - 8x = a + 4$ 를 만족하는 x 의 값이 없을 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$a^2x + 2ax - 8x = a + 4$$

$$(a^2 + 2a - 8)x = a + 4$$

해가 없을 때이므로

$$a^2 + 2a - 8 = 0, a + 4 \neq 0 \text{ 이다.}$$

$$a^2 + 2a - 8 = 0, (a + 4)(a - 2) = 0$$

$$a + 4 \neq 0 \text{ 이므로 } a - 2 = 0, a = 2 \text{ 이다.}$$

20. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ 이고, $k = f(49) + f(50) + f(51) + \dots + f(79) + f(80)$ 이다.

k 가 x 에 관한 이차방정식 $(a+5)x^2 + (a^2-2)x + 4(a-2) = 0$ 의 한 근일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-\frac{8}{3}$

해설

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x+1-x}$$

$$= \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$k = f(49) + f(50) + f(51) + \dots + f(79) + f(80)$$

$$= \sqrt{50} - \sqrt{49} + \sqrt{51} - \sqrt{50}$$

$$+ \dots + \sqrt{81} - \sqrt{80}$$

$$= -\sqrt{49} + \sqrt{81}$$

$$= -7 + 9 = 2$$

$(a+5)x^2 + (a^2-2)x + 4(a-2) = 0$ 에 $x=2$ 를 대입하면

$$4a + 20 + 2a^2 - 4 + 4a - 8 = 0$$

$$2a^2 + 8a + 8 = 0, \quad a^2 + 4a + 4 = 0$$

$$(a+2)^2 = 0 \quad \therefore a = -2$$

$a = -2$ 를 식에 대입하면

$$3x^2 + 2x - 16 = 0, \quad (x-2)(3x+8) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -\frac{8}{3}$$

21. 이차방정식 $x^2 + 3ax + 2a^2 = 0$ 의 한 근이 -2 일 때, a 의 값과 다른 한 근을 구하여라. (단, 다른 한 근은 -2 보다 작은 수이다.)

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

▷ 정답: $x = -4$

해설

$x^2 + 3ax + 2a^2 = 0$ 에 $x = -2$ 를 대입하면

$$4 - 6a + 2a^2 = 0$$

$$2a^2 - 6a + 4 = 0$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$(a - 1)(a - 2) = 0$$

∴ $a = 1$ 또는 $a = 2$

i) $a = 1$ 일 때,

$$x^2 + 3x + 2 = 0, (x + 1)(x + 2) = 0$$

∴ $x = -1$ 또는 $x = -2$

따라서 다른 한 근은 -2 보다 작은 수이므로 조건에 맞지 않는다.

ii) $a = 2$ 일 때,

$$x^2 + 6x + 8 = 0, (x + 2)(x + 4) = 0$$

∴ $x = -2$ 또는 $x = -4$

다른 한 근은 -2 보다 작은 수이므로 -4 이다.

∴ $a = 2, x = -4$

22. 세 개의 이차방정식 $x^2 - (1+p)x + p = 0$, $x^2 - (q-1)x - q = 0$, $x^2 - 2(p+2q)x + 8pq = 0$ 은 각각 서로 다른 두 실근을 갖는다. 세 개의 이차방정식의 공통근이 음수일 때, $p-4q-1$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - (1+p)x + p = 0$, $x = 1, x = p \cdots \textcircled{A}$
 $x^2 - (q-1)x - q = 0$, $x = -1, x = q \cdots \textcircled{B}$
 $x^2 - 2(p+2q)x + 8pq = 0$, $x = 2p, x = 4q \cdots \textcircled{C}$
세 개의 이차방정식의 공통근이 음수이므로,
 \textcircled{A} 에서 공통근은 $x = p$
 \textcircled{B} 에서 $2p \neq p$ 이므로 공통근은 $x = 4q$
 \textcircled{C} 에서 $q \neq 4q$ 이므로 공통근은 $x = -1$
 $\therefore p = 4q = -1$, $p - 4q = 0$
 $\therefore p - 4q - 1 = -1$

23. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ 일 때, $\begin{vmatrix} x & 5 \\ 3-x & x-2 \end{vmatrix} = 2x^2 - 5x$ 를 만족하는 x 의

값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x = 3$

▷ 정답: $x = 5$

해설

$$\begin{vmatrix} x & 5 \\ 3-x & x-2 \end{vmatrix} = x(x-2) - 5(3-x)$$

를 정리하면

$$x^2 - 2x - 15 + 5x = x^2 + 3x - 15$$

$$\text{즉, } x^2 + 3x - 15 = 2x^2 - 5x$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x-3)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = 3 \text{ 또는 } x = 5$$

24. $x^2 + ax + b = 0$ 에서 계수 a, b 를 정하기 위하여 주사위를 던져서 나오는 첫 번째의 수를 a , 두 번째의 수를 b 라 한다. 이 때, 이 이차 방정식이 중근을 가지는 확률은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{1}{18}$

해설

중근을 가지려면 $x^2 + ax + b = 0$ 이 완전제곱식이 되어야 하므로

$$\left(a \times \frac{1}{2}\right)^2 = b \text{이다.}$$

$a^2 = 4b$ 를 만족하는 (a, b) 를 구하면 $(a, b) = (2, 1), (4, 4)$ 의 두 가지이고 모든 경우의 수는 36 가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ 이다.

25. 이차방정식 $\frac{1}{12}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{2x}$ 의 양의 근을 α 라고 할 때, $\alpha^2 + 4\alpha$ 의 값은?

- ① $24 + 5\sqrt{21}$ ② $26 + 6\sqrt{23}$ ③ $28 + 7\sqrt{26}$
④ $32 + 8\sqrt{23}$ ⑤ $34 + 8\sqrt{22}$

해설

$$\begin{aligned} \frac{1}{12}x - \frac{1}{3} &= \frac{3}{2x} \text{의 양변에 } 12x \text{ 를 곱하면} \\ x^2 - 4x - 18 &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 &= 18 + 4 \\ (x-2)^2 &= 22 \\ \therefore x &= 2 \pm \sqrt{22} \\ \alpha \text{ 는 양의 근이므로 } \alpha &= 2 + \sqrt{22} \\ \therefore \alpha^2 + 4\alpha &= 34 + 8\sqrt{22} \end{aligned}$$