1. 두 수 5 와 9 사이에 있는 무리수 중에서 $\sqrt{n}$ 의 꼴로 나타낼 수 있는 가장 큰 수를 $\sqrt{a}$, 가장 작은 수를 $\sqrt{b}$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값으로 알맞은 것을 고르면? (단, n 은 자연수)

① 98 ② 100 ③ 102 ④ 104 ⑤ 106

해설

$5=\sqrt{25}$,
$9=\sqrt{81}$,
$a=80$,
$b=26$,
$\therefore a+b=106$

2. $\sqrt{2}=x$, $\sqrt{3}=y$ 일 때, $\sqrt{5}$ 를 x 와 y 로 나타낸 것으로 옳은 것은?

① $x+y$ ② x^2+y^2 ③ $\sqrt{x+y}$
④ $\sqrt{x^2+y^2}$ ⑤ $\sqrt{xy}$

해설

$\sqrt{5}=\sqrt{2+3}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

3. $6 < \sqrt{3n} < 8$ 을 만족하는 자연수 n 의 값 중 최댓값을 a, 최솟값을 b 라고 할 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： $a - b = 8$

해설

$6 < \sqrt{3n} < 8 \rightarrow 36 < 3n < 64 \rightarrow 12 < n < \frac{64}{3}$

즉 $a = 21,\ b = 13 \quad \therefore a - b = 8$

4. $a < 0$ 일 때, $\sqrt{81a^2} \div (-\sqrt{3a})^2 + \sqrt{(-0.5a)^2} \times \left(\sqrt{\frac{1}{5}a}\right)^2$ 을 계산하면?

① $0.1a^2 - 3$　② $0.1a^2 + 3$　③ $0.5a^2 - 3$
④ $0.5a^2 + 3$　⑤ $a^2 - 3$

해설

$\sqrt{81a^2} \div (-\sqrt{3a})^2 + \sqrt{(-0.5a)^2} \times \left(\sqrt{\frac{1}{5}a}\right)^2$

$= -9a \times \left(-\frac{1}{3a}\right) + (-0.5a) \times \left(-\frac{1}{5}a\right)$

$= 3 + 0.1a^2$

5. $a > 0$ 일 때, $\sqrt{(-4a)^2} - \sqrt{9a^2} + (-\sqrt{2a})^2$ 을 간단히 하면?

① $-a$　② $3a$　③ $5a$　④ a　⑤ $-3a$

해설

$\sqrt{(4a)^2} - \sqrt{(3a)^2} + (\sqrt{2a})^2$
$= |4a| - |3a| + 2a$
$= 4a - 3a + 2a = 3a$

6. $a > 0$ 일 때, $\sqrt{a^2} - (-\sqrt{a})^2 - \sqrt{(-a)^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-a$

해설

$\sqrt{a^2} - (-\sqrt{a})^2 - \sqrt{(-a)^2} = a - a - a = -a$

7. $(-9)^2$ 의 양의 제곱근을 a, $\sqrt{625}$ 의 음의 제곱근을 b 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=4$

해설

$(-9)^2 = 81 = (\pm 9)^2$

$\therefore\ a = 9$

$\sqrt{625} = 25 = (\pm 5)^2$

$\therefore\ b = -5$

$\therefore\ a+b = 9-5 = 4$

8. a, b, c 의 값이 다음과 같이 주어질 때, $a \times b \times c$ 의 값을 바르게 구한 것은?

$a \rightarrow$ 제곱근 36 $b \rightarrow 3$ 의 양의 제곱근 $c \rightarrow \sqrt{(-3)^2}$ 의 음의 제곱근

① -18　　② 18　　③ $-18\sqrt{3}$

④ $18\sqrt{3}$　　⑤ 108

해설

$a = (\text{제곱근 } 36) = \sqrt{36} = 6$

$b = (3 \text{ 의 양의 제곱근}) = \sqrt{3}$

$c = (\sqrt{(-3)^2} \text{ 의 음의 제곱근}) = (3 \text{ 의 음의 제곱근}) = -\sqrt{3}$

$\therefore\ a \times b \times c = 6 \times \sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) = -18$

9. 다음 수의 제곱근 중 바르지 않은 것은?

① 100의 제곱근 $= \pm 10$

② 7의 제곱근 $= \pm\sqrt{7}$

③ -4의 제곱근은 없다.

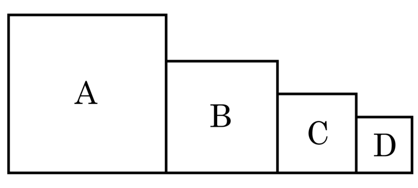
④ 0.2의 제곱근 $= \pm 0.04$

⑤ $\frac{1}{2}$의 제곱근 $= \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

해설

④ 0.2의 제곱근 $= \pm\sqrt{0.2} = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$

10. 다음 그림에서 사각형 A, B, C, D 는 모두 정사각형이다. C 의 넓이는 D 의 넓이의 2 배, B 의 넓이는 C 의 넓이의 2 배, A 의 넓이는 B 의 넓이의 2 배인 관계가 있다고 한다. A 의 넓이가 4 cm^2 일 때, D 의 한 변의 길이는?



① $\frac{1}{4}$ cm ② $\frac{1}{2}$ cm ③ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ cm
④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ cm ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm

해설

(B의 넓이) $= \frac{1}{2} \times$ (A의 넓이)

(C의 넓이) $= \frac{1}{2} \times$ (B의 넓이) $= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times$ (A의 넓이)

(D의 넓이) $= \frac{1}{2} \times$ (C의 넓이)

$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times$ (A의 넓이)

A 의 넓이가 4 cm^2 이므로

(D의 넓이) $= \frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2}$

따라서 (D의 넓이) = (한 변의 길이)$^2 = \frac{1}{2}(\mathrm{cm}^2)$ 이므로

(한 변의 길이) $= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{cm})$ 이다.

11. $x^2 = 4$, $y^2 = 9$ 이고 $x - y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

$x = \pm 2,\ y = \pm 3$
$x - y = -1,\ 5,\ -5,\ 1$
$\therefore M - m = 5 - (-5) = 10$

12. $\sqrt{25}$ 의 양의 제곱근을 a , $\sqrt{81}$ 의 음의 제곱근을 b , $\sqrt{(-169)^2}$ 의 음의 제곱근을 c 라 할 때, $bc - \sqrt{5}a$ 의 제곱근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\pm\sqrt{34}$

해설

$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$ 의 제곱근은 $\pm\sqrt{5}$ $\therefore a = \sqrt{5}$
$\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$ 의 제곱근은 ± 3 $\therefore b = -3$
$\sqrt{(-169)^2} = 169$ 의 제곱근은 ± 13 $\therefore c = -13$
$bc - \sqrt{5}a = (-3) \times (-13) - \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 34$ 이므로
34 의 제곱근은 $\pm\sqrt{34}$ 이다.

13. $\sqrt{(-1)^2}$ 의 음의 제곱근을 a, $6\sqrt{3\sqrt{144}}$ 의 양의 제곱근을 b 라 할 때, $3a+2b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 = (\pm 1)^2$

$\therefore\ a = -1$

$6\sqrt{3\sqrt{144}} = 6\sqrt{3\times 12} = 6\times 6 = 36 = (\pm 6)^2$

$\therefore\ b = +6$

$3a + 2b = 3\times(-1) + 2\times 6 = -3 + 12 = 9$

14. $a,\ b,\ c$ 가 $a>0$, $b>0$, $c>0$ 이고, $c>b>a$ 일 때, $\sqrt{(a-b)^2}-\sqrt{(b-c)^2}-\sqrt{(c-a)^2}$ 을 간단히 하면?

① $a+b+c$　　② $a-b-c$　　③ $2b-2c$

④ 0　　⑤ $2a-2b$

해설

$a-b<0,\ b-c<0,\ c-a>0$ 이므로

$$\sqrt{(a-b)^2}-\sqrt{(b-c)^2}-\sqrt{(c-a)^2}$$
$$=-(a-b)-\{-(b-c)\}-(c-a)$$
$$=-a+b+b-c-c+a$$
$$=2b-2c$$

15. 자연수 a, b에 대해서 $\sqrt{49-a}+\sqrt{196+b}$ 가 자연수가 될 때, $10a-b$의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 461

해설

$\sqrt{49-a}+\sqrt{196+b}$이 자연수가 되려면 $49-a, 196+b$가 각각 완전제곱수가 되어야 한다.
또한 $10a-b$가 최댓값이 되려면 a는 최댓값, b는 최솟값이어야 한다.
$\sqrt{49-a}$가 0보다 크거나 같은 정수가 되는 a의 최댓값은 $a=49$이다.
$\sqrt{196+b}$가 자연수가 되는 b의 최솟값은 $b=29$이다.
따라서 $10a-b=490-29=461$이다.

16. $\sqrt{144-x}-\sqrt{25+y}$ 가 가장 큰 자연수가 되게 하는 자연수 x, y 에 대하여 xy 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 253

해설

$\sqrt{144-x}-\sqrt{25+y}$ 가 가장 큰 자연수가 되려면
$\sqrt{144-x}$ 는 최댓값, $\sqrt{25+y}$ 는 최솟값을 가져야 한다.
$\sqrt{144}(=12) > \sqrt{144-x}$ 이므로
$\sqrt{144-x}=11$일 때, 최댓값을 갖는다.
$144-x=11^2$ 에서 $x=23$
또, $\sqrt{25}(=5) < \sqrt{25+y}$ 이므로
$\sqrt{25+y}=6$ 일 때, 최솟값을 갖는다.
$25+y=6^2$ 에서 $y=11$
$\therefore xy=23\times 11=253$

17. 유리수 a 와 무리수 b 가 $a > 0$, $b > 0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① $b\sqrt{a}$ 는 항상 무리수이다.

② $\dfrac{b}{\sqrt{a}}$ 는 항상 유리수이다.

③ $b - a$ 는 항상 무리수이다.

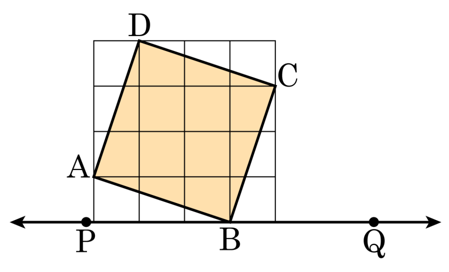
④ ab 는 항상 무리수이다.

⑤ $b - \sqrt{a}$ 는 유리수일 수도 있고, 무리수일 수도 있다.

해설

$a = 2$, $b = \sqrt{2}$ 라 하면
① $b\sqrt{a} = 2$ 유리수이지만 $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ 일 때는 무리수
② $\dfrac{b}{\sqrt{a}} = 1$ 유리수이지만 $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ 일 때는 무리수
③ $b - a = \sqrt{2} - 2$ 항상 무리수
④ $ab = 2\sqrt{2}$ 항상 무리수
⑤ $b - \sqrt{a} = 0$ 유리수이지만 $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ 일 때는 무리수
따라서 옳은 것은 ③, ④, ⑤이다.

18. 다음 그림과 같은 수직선 위의 정사각형 ABCD에서 $\overline{AB} = \overline{PB}$, $\overline{CB} = \overline{QB}$일 때, $\overline{PQ}$의 길이를 구하여라. (단, 모눈 한 칸의 길이는 1 이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{10}$

해설

$\overline{BC}$를 대각선으로 하는 직사각형에서 $\overline{BC}$를 빗변으로 하는 색칠하지 않은 부분의 삼각형의 넓이는 가로 1 , 세로 3 인 직사각형 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이므로 $1 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 이다.

따라서 □ABCD $= 4 \times 4 - \frac{3}{2} \times 4 = 10$ 이다.

□ABCD는 정사각형이므로
$\overline{BC}^2 = 10$, $\therefore \overline{BC} = \sqrt{10}$
$\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{10}$ 이므로 $\overline{PQ} = 2\sqrt{10}$ 이다.

19. 자연수 x에 대하여
$\sqrt{x}$ 미만의 자연수의 개수를 $f(x)$라 할 때,
$f(220)-f(144)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\sqrt{196}(=14) < \sqrt{220} < \sqrt{225}(=15)$ 이므로
$f(220) = (\sqrt{220}$ 미만의 자연수의 개수$) = 14$
$\sqrt{144} = \sqrt{(12)^2} = 12$ 이므로
$f(144) = (\sqrt{144}$ 미만의 자연수의 개수$) = 11$
$\therefore f(220)-f(144) = 14-11 = 3$

20. 다음을 간단히 하라.

$$\sqrt{\left(\sqrt{13}-3\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{13}\right)^2}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{13}-6$

해설

$\sqrt{13}>3$ 이므로

$\sqrt{\left(\sqrt{13}-3\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{13}\right)^2}$

$=\sqrt{13}-3-\left(3-\sqrt{13}\right)$

$=\sqrt{13}-3-3+\sqrt{13}$

$=2\sqrt{13}-6$

21. $2 < \sqrt{a+2b} < 3$ 을 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$ 는 모두 몇 개인지 구하여라. (단, a, b 는 자연수, $a \neq b$)

▶ 답: 개

▷ 정답: 9 개

해설

$2 < \sqrt{a+2b} < 3$, $\sqrt{4} < \sqrt{a+2b} < \sqrt{9}$

$a+2b = 5$, 6 , 7 , 8

$(a,\ b) = (1,\ 2)$, $(3,\ 1)$, $(4,\ 1)$, $(1,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(5,\ 1)$, $(2,\ 3)$, $(4,\ 2)$, $(6,\ 1)$

따라서 9 개이다.

22. $a > 0$, $b > 0$ 이고, $ab = 16$, $\sqrt{a} - \dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{15}{4}$, $\sqrt{b} - \dfrac{1}{\sqrt{b}} = 0$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 17$

해설

$\sqrt{a} - \dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{15}{4}$, $\sqrt{b} - \dfrac{1}{\sqrt{b}} = 0$ 에서

$\left(\sqrt{a} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\sqrt{b} - \dfrac{1}{\sqrt{b}}\right) = 0 \cdots ①$

$a > 0$, $b > 0$ 이므로

① 식을 전개하면

$\sqrt{ab} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{ab}} = 0$

$\sqrt{ab} - \left(\dfrac{\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}}{\sqrt{ab}}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{ab}} = 0$

$ab = 16$ 이므로 $4 - \dfrac{a+b}{4} + \dfrac{1}{4} = 0$

$\therefore\ a + b = 17$

23. 다음을 간단히 하여라.

$$\sqrt{2}-\cfrac{1}{\sqrt{2}-\cfrac{1}{\sqrt{2}-\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$ 이므로

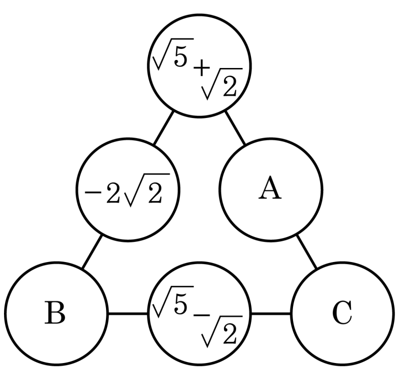
$$(\text{준식})=\sqrt{2}-\cfrac{1}{\sqrt{2}-\cfrac{1}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}+1)}}$$

$$=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)$$

$$=1$$

24. 다음 그림에서 삼각형의 각 변에 있는 수의 합은 모두 같다고 할 때, $A-B+C$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $-2\sqrt{2}$

해설

$B-2\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{2}=B+C+\sqrt{5}-\sqrt{2}$에서

$\therefore\ C=0$

$\sqrt{5}+\sqrt{2}+A=\sqrt{5}-\sqrt{2}+B$에서

$\therefore\ A-B=-2\sqrt{2}$

$\therefore\ A-B+C=-2\sqrt{2}$