1. 이차방정식 $2x^2 - 8x + k - 2 = 0$ 가 중근을 가질 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$2(x-2)^2 = 2x^2 - 8x + 8 = 2x^2 - 8x + k - 2 = 0$
$k - 2 = 8$
$\therefore k = 10$

2. 다음은 이차방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0\ (a \neq 0)$을 푸는 과정이다. ① ~ ⑤에 들어갈 식이 바르지 못한 것은? (단, $b^2 - ac \geq 0$)

$$ax^2 + 2bx + c = 0\,(a \neq 0)$$
$$x^2 + \frac{2b}{a}x = -\frac{c}{a}$$
$$x^2 + \frac{2b}{a}x + ① = -\frac{c}{a} + ①$$
$$(x + ②)^2 = ③$$
$$x = ④ \pm ⑤$$

① $\frac{b^2}{a^2}$ ② $\frac{b}{a}$ ③ $\frac{b^2 - ac}{a^2}$
④ $-\frac{b}{a}$ ⑤ $\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a^2}$

해설

$ax^2 + 2bx + c = 0\,(a \neq 0)$
양변을 a 로 나누고 상수항을 이항하면
$x^2 + \frac{2b}{a}x = -\frac{c}{a}$,
양변에 $\frac{b^2}{a^2}$ 을 더하면
$x^2 + \frac{2b}{a}x + \frac{b^2}{a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{a^2}$
$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 - ac}{a^2}$
$x + \frac{b}{a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$
$x = -\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$
∴ ⑤가 잘못 되었다.

3. 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $x^2-4x-3=0$의 양의 근을 구하면?

① $2+\sqrt{7}$ ② $2\pm\sqrt{7}$ ③ $2-\sqrt{7}$
④ $-2+\sqrt{7}$ ⑤ $-2\pm\sqrt{7}$

해설

근의 공식(짝수 공식)으로 풀면

$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2+3}}{1}=2\pm\sqrt{7}$

따라서 양의 해는 $2+\sqrt{7}$이다.

4. 실수 a, b 에 대하여 $(a^2+b^2)(a^2+b^2+1)=9$ 일 때, a^2+b^2 의 값을 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{37}}{2}$　② $\frac{-1-\sqrt{37}}{2}$　③ $\frac{1+\sqrt{37}}{2}$
④ $\frac{1-\sqrt{37}}{2}$　⑤ $\frac{-1\pm\sqrt{37}}{2}$

해설

$a^2+b^2=X$ 로 치환하면 $X(X+1)=9$
$X^2+X-9=0$
$\therefore a^2+b^2=\frac{-1\pm\sqrt{37}}{2}$
그런데 a, b 는 실수이므로
$a^2+b^2\geq 0$
$\therefore\ a^2+b^2=\frac{-1+\sqrt{37}}{2}$

5. $(x-y-1)(x-y-5)=-4$ 를 만족하는 $x-y$ 의 값을 구하여라.(단, $x>y$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x-y=t$ 라 하면

$(t-1)(t-5)=-4$

$t^2-6t+9=0$

$(t-3)^2=0$

$\therefore\ t=3$

$\therefore\ x-y=3$

6. 이차방정식 $(x-3)^2-(x-3)=12$ 를 풀면?

① $x=-3$ 또는 $x=4$
② $x=-4$ 또는 $x=3$
③ $x=0$ 또는 $x=7$
④ $x=-7$ 또는 $x=0$
⑤ $x=2$ 또는 $x=6$

해설

$(x-3)^2-(x-3)=12$
$x-3=A$ 라고 하면
$A^2-A-12=0$
$(A-4)(A+3)=0$
$(x-3-4)(x-3+3)=0$
$x(x-7)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=7$

7. 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a+b+c$ 의 값은?

$$\frac{ax^2-3x-b}{4x^2+cx-5}=2$$

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ $\frac{33}{2}$

해설

$\frac{ax^2-3x-b}{4x^2+cx-5}=2$를 정리하면,
$(a-8)x^2+(-3-2c)x-b+10=0$
이 식이 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 성립하므로 x 에 대한 항등식이다.
따라서 $a-8=0,\ -3-2c=0,\ -b+10=0$
$\therefore\ a=8,\ b=10,\ c=-\frac{3}{2}$
$a+b+c=\frac{33}{2}$ 이다.

8. $7x-5<4(x+1)$이고 x는 자연수일 때, $x^2-5x+6=0$를 풀면?

① $x=0,\ x=1$　② $x=2$　③ $x=2,\ x=3$
④ $x=3$　⑤ $x=-2,\ x=3$

해설

$7x-5<4(x+1)$ 에서 $7x-4x<4+5$, $3x<9$ $\therefore\ x<3$
따라서 x의 값은 1, 2이다.
$x^2-5x+6=0$의 해는 $x=2,\ x=3$이므로 해는 $x=2$가 된다.

9. 부등식 $4 \le 3x-2 < 8$을 만족하는 두 자연수가 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 근일 때, $\dfrac{a+b}{ab}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{11}{30}$

해설

부등식 $4 \le 3x-2 < 8$을 풀면 다음과 같다.

$6 \le 3x < 10$

$2 \le x < \dfrac{10}{3}$

$\therefore x = 2, 3$

이 두 자연수를 근으로 가지므로 이를 이차방정식에 대입하여 풀면

$a = 5, b = 6$

$\therefore \dfrac{a+b}{ab} = \dfrac{11}{30}$

10. 이차방정식 $x^2-4x+2=0$ 의 한 근이 a 일 때, $a^2+\dfrac{4}{a^2}$ 의 값은?

① 12　② 13　③ 15　④ 16　⑤ 18

해설

$x=a$ 를 주어진 이차방정식에 대입하면 $a^2-4a+2=0$

양변을 a 로 나누면 $a-4+\dfrac{2}{a}=0$ 이므로 $a+\dfrac{2}{a}=4$

$\therefore a^2+\dfrac{4}{a^2}=\left(a+\dfrac{2}{a}\right)^2-4=4^2-4=12$

11. 이차방정식 $(x-1)(x-b)=-1$이 0이 아닌 중근 a를 가진다. 이때, b의 값은? (단, a, b는 정수)

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$(x-1)(x-b)=-1$이 중근 a를 가지므로
x에 a를 대입하면
$(a-1)(a-b)=-1$
ⅰ) $a-1=-1$, $a-b=1$인 경우
$a=0$, $b=-1$, $a\neq0$이므로 부적합
ⅱ) $a-1=1$, $a-b=-1$인 경우
$a=2$, $b=3$
$\therefore b=3$

12. 이차방정식 $5x^2 + 12x - 6 = 0$ 의 모든 근 p 에 대해서도 $|p| < n$ 을 만족하는 최소의 양의 정수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$p = \dfrac{-6 \pm \sqrt{66}}{5}$

$\left| \dfrac{-6 - \sqrt{66}}{5} \right| = \left| \dfrac{6 + \sqrt{66}}{5} \right| < n$

따라서 최소의 양의 정수 n 은 3 이다.

13. 이차방정식 $x^2-8x+a=0$ 의 해가 정수일 때, 자연수 a 의 값 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x^2-8x+a=0$ 의 해 $x=4\pm\sqrt{16-a}$ 가 정수이기 위해서는 근호 안의 수가 제곱수이어야 한다.
a 는 자연수이므로 $0\le 16-a<16$
$16-a=0,\ 1,\ 4,\ 9$
$\therefore\ a=7,\ 12,\ 15,\ 16$
따라서 가장 큰 수는 $a=16$ 이다.

14. 이차방정식 $-x+0.4(x^2+1)=-\frac{1}{3}(x-1)(2x+3)$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha-\beta$ 의 값은? (단, $\alpha<\beta$)

① $\frac{10}{3}$　② $-\frac{8}{3}$　③ -1　④ 3　⑤ $-\frac{13}{8}$

해설

$-x+0.4(x^2+1)=-\frac{1}{3}(x-1)(2x+3)$,

$-x+\frac{2}{5}(x^2+1)=-\frac{1}{3}(x-1)(2x+3)$

양변에 15를 곱하여 정리하면

$-15x+6(x^2+1)=-5(x-1)(2x+3)$

$16x^2-10x-9=0$

근의 공식을 이용하여 근을 구하면

$x=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{16}=\frac{5\pm 13}{16}$

$\therefore\ x=\frac{9}{8}$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

$\alpha<\beta$ 이므로 $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{9}{8}$

$\therefore\ \alpha-\beta=-\frac{13}{8}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ 이고, $k = f(1) + f(2) + \cdots + f(23) + f(24)$ 이다.
k 가 x 에 관한 이차방정식 $(a+1)x^2 + \left(a^2 - 2\right)x + 8 = 0$ 의 한 근일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x+1-x}$$
$$= \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} k &= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(23) + f(24) \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{25} - \sqrt{24} \\ &= -\sqrt{1} + \sqrt{25} \\ &= -1 + 5 = 4 \end{aligned}$$

$(a+1)x^2 + \left(a^2 - 2\right)x + 8 = 0$ 에 $x = 4$ 를 대입
$16a + 16 + 4a^2 - 8 + 8 = 0$
$4a^2 + 16a + 16 = 0,\ a^2 + 4a + 4 = 0$
$(a+2)^2 = 0 \qquad \therefore\ a = -2$
$a = -2$ 를 식에 대입하면
$-x^2 + 2x + 8 = 0,\ -(x+2)(x-4) = 0$
$\therefore\ x = -2$ 또는 $x = 4$

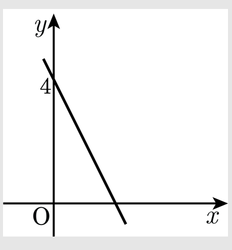
16. 직선 $px - y + 4 = 0$이 점$(p-2,\ 3p^2)$을 지나고 제3 사분면을 지나지 않을 때, p의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = px + 4$가 제3 사분면을 지나지 않으려면 다음 그림과 같이 그려져야 한다.



따라서, $p \le 0$ 이다.
점 $(p-2,\ 3p^2)$을 지나므로, 대입해주면
$y = px + 4$
$3p^2 = p(p-2) + 4$
$2p^2 + 2p - 4 = 0$
$2(p+2)(p-1) = 0$
따라서 $p \le 0$이므로 $p = -2$이다.

17. 두 개의 이차방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 과 $x^2 - 2x - a = 0$ 은 단 한 개의 공통 해를 갖는다고 한다. 이 때, 공통 해와 양의 실수 a 의 값을 구하면?

① $x = 2,\ a = -3$　　② $x = 2,\ a = 3$

③ $x = 1,\ a = 3$　　④ $x = -1,\ a = -3$

⑤ $x = -1,\ a = 3$

해설

두 방정식의 공통인 해를 α 라 하고 $x = \alpha$ 를 두 방정식에 각각 대입하면

$\alpha^2 + a\alpha + 2 = 0 \cdots$ ㉠ , $\alpha^2 - 2\alpha - a = 0 \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡하면

$(a + 2)\alpha + (a + 2) = 0, (a + 2)(\alpha + 1) = 0$

$a = -2$ 또는 $\alpha = -1$ 에서 $a > 0$ 이므로 $\alpha = -1$

$\alpha = -1$을 ㉠에 대입하면

$1 - a + 2 = 0 \quad \therefore a = 3$

18. 이차방정식 $\frac{1}{12}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{2x}$ 의 양의 근을 α 라고 할 때, $\alpha^2 + 4\alpha$ 의 값은?

① $24 + 5\sqrt{21}$ ② $26 + 6\sqrt{23}$ ③ $28 + 7\sqrt{26}$
④ $32 + 8\sqrt{23}$ ⑤ $34 + 8\sqrt{22}$

해설

$\frac{1}{12}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{2x}$ 의 양변에 $12x$ 를 곱하면
$x^2 - 4x - 18 = 0$
$x^2 - 4x + 4 = 18 + 4$
$(x-2)^2 = 22$
$\therefore\ x = 2 \pm \sqrt{22}$
α 는 양의 근이므로 $\alpha = 2 + \sqrt{22}$
$\therefore\ \alpha^2 + 4\alpha = 34 + 8\sqrt{22}$

19. 이차방정식 $x^2 - 6x - n = 0$ 의 해가 정수가 되도록 하는 두 자리의 정수 n 의 개수를 구하여라.

▶ 답: __________ 개

▷ 정답: 6개

해설

$x = 3 \pm \sqrt{9+n}$ 이므로 해가 정수가 되기 위해서는
$9+n =$ (완전제곱수) 이고 n 은 두 자리의 정수이므로
$9+n = 25,\ 36,\ 49,\ \cdots, 100$
$n = 16,\ 27,\ 40,\ 55,\ 72,\ 91$ 의 6 개이다.