

1. 이차방정식  $2x^2 - 8x + k - 2 = 0$  가 중근을 가질 때,  $k$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$2(x-2)^2 = 2x^2 - 8x + 8 = 2x^2 - 8x + k - 2 = 0$$

$$k - 2 = 8$$

$$\therefore k = 10$$

2. 다음은 이차방정식  $ax^2 + 2bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )을 푸는 과정이다. ① ~ ⑤에 들어갈 식이 바르지 못한 것은? (단,  $b^2 - ac \geq 0$ )

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$x^2 + \frac{2b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{2b}{a}x + \textcircled{1} = -\frac{c}{a} + \textcircled{1}$$

$$(x + \textcircled{2})^2 = \textcircled{3}$$

$$x = \textcircled{4} \pm \textcircled{5}$$

①  $\frac{b^2}{a^2}$

②  $\frac{b}{a}$   
 ⑤  $\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a^2}$

③  $\frac{b^2 - ac}{a^2}$

④  $-\frac{b}{a}$

### 해설

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

양변을  $a$ 로 나누고 상수항을 이항하면

$$x^2 + \frac{2b}{a}x = -\frac{c}{a},$$

양변에  $\frac{b^2}{a^2}$ 을 더하면

$$x^2 + \frac{2b}{a}x + \frac{b^2}{a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 - ac}{a^2}$$

$$x + \frac{b}{a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$$x = -\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$\therefore$  ⑤가 잘못 되었다.

3. 근의 공식을 이용하여 이차방정식  $x^2 - 4x - 3 = 0$ 의 양의 근을 구하면?

①  $2 + \sqrt{7}$

②  $2 \pm \sqrt{7}$

③  $2 - \sqrt{7}$

④  $-2 + \sqrt{7}$

⑤  $-2 \pm \sqrt{7}$

해설

근의 공식(짝수 공식)으로 풀면

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 + 3}}{1} = 2 \pm \sqrt{7}$$

따라서 양의 해는  $2 + \sqrt{7}$ 이다.

4. 실수  $a, b$  에 대하여  $(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + 1) = 9$  일 때,  $a^2 + b^2$  의 값을 구하면?

①  $\frac{-1 + \sqrt{37}}{2}$

②  $\frac{-1 - \sqrt{37}}{2}$

③  $\frac{1 + \sqrt{37}}{2}$

④  $\frac{1 - \sqrt{37}}{2}$

⑤  $\frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}$

해설

$$a^2 + b^2 = X \text{ 로 치환하면 } X(X + 1) = 9$$

$$X^2 + X - 9 = 0$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}$$

그런데  $a, b$  는 실수이므로

$$a^2 + b^2 \geq 0$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{-1 + \sqrt{37}}{2}$$

5.  $(x - y - 1)(x - y - 5) = -4$  를 만족하는  $x - y$  의 값을 구하여라. (단,  $x > y$ )

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$x - y = t$  라 하면

$$(t - 1)(t - 5) = -4$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$(t - 3)^2 = 0$$

$$\therefore t = 3$$

$$\therefore x - y = 3$$

6. 이차방정식  $(x-3)^2 - (x-3) = 12$  를 풀면?

①  $x = -3$  또는  $x = 4$

②  $x = -4$  또는  $x = 3$

③  $x = 0$  또는  $x = 7$

④  $x = -7$  또는  $x = 0$

⑤  $x = 2$  또는  $x = 6$

해설

$$(x-3)^2 - (x-3) = 12$$

$x-3 = A$  라고 하면

$$A^2 - A - 12 = 0$$

$$(A-4)(A+3) = 0$$

$$(x-3-4)(x-3+3) = 0$$

$$x(x-7) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 7$$

7. 서로 다른 세 개의  $x$  값에 대하여 다음 식이 성립할 때,  $a + b + c$  의 값은?

$$\frac{ax^2 - 3x - b}{4x^2 + cx - 5} = 2$$

①  $\frac{1}{2}$

②  $\frac{7}{2}$

③  $\frac{9}{2}$

④  $\frac{11}{2}$

⑤  $\frac{33}{2}$

해설

$$\frac{ax^2 - 3x - b}{4x^2 + cx - 5} = 2 \text{를 정리하면,}$$

$$(a - 8)x^2 + (-3 - 2c)x - b + 10 = 0$$

이 식이 서로 다른 세 개의  $x$  값에 대하여 성립하므로  $x$  에 대한  
항등식이다.

$$\text{따라서 } a - 8 = 0, \quad -3 - 2c = 0, \quad -b + 10 = 0$$

$$\therefore a = 8, \quad b = 10, \quad c = -\frac{3}{2}$$

$$a + b + c = \frac{33}{2} \text{ 이다.}$$

8.  $7x - 5 < 4(x + 1)$ 이고  $x$ 는 자연수일 때,  $x^2 - 5x + 6 = 0$ 를 풀면?

①  $x = 0, x = 1$

②  $x = 2$

③  $x = 2, x = 3$

④  $x = 3$

⑤  $x = -2, x = 3$

해설

$7x - 5 < 4(x + 1)$  에서  $7x - 4x < 4 + 5$ ,  $3x < 9 \therefore x < 3$

따라서  $x$ 의 값은 1, 2이다.

$x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 해는  $x = 2, x = 3$ 이므로 해는  $x = 2$ 가 된다.



9. 부등식  $4 \leq 3x - 2 < 8$ 을 만족하는 두 자연수가 이차방정식  $x^2 - ax + b = 0$ 의 근일 때,  $\frac{a+b}{ab}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 정답:  $\frac{11}{30}$

#### 해설

부등식  $4 \leq 3x - 2 < 8$ 을 풀면 다음과 같다.

$$6 \leq 3x < 10$$

$$2 \leq x < \frac{10}{3}$$

$$\therefore x = 2, 3$$

이 두 자연수를 근으로 가지므로 이를 이차방정식에 대입하여 풀면

$$a = 5, b = 6$$

$$\therefore \frac{a+b}{ab} = \frac{11}{30}$$

10. 이차방정식  $x^2 - 4x + 2 = 0$  의 한 근이  $a$  일 때,  $a^2 + \frac{4}{a^2}$  의 값은?

① 12

② 13

③ 15

④ 16

⑤ 18

해설

$x = a$  를 주어진 이차방정식에 대입하면  $a^2 - 4a + 2 = 0$

양변을  $a$  로 나누면  $a - 4 + \frac{2}{a} = 0$  이므로  $a + \frac{2}{a} = 4$

$$\therefore a^2 + \frac{4}{a^2} = \left(a + \frac{2}{a}\right)^2 - 4 = 4^2 - 4 = 12$$

11. 이차방정식  $(x-1)(x-b) = -1$ 이 0이 아닌 중근  $a$ 를 가진다. 이때,  $b$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 정수)

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

### 해설

$(x-1)(x-b) = -1$ 이 중근  $a$ 를 가지므로  
 $x$ 에  $a$ 를 대입하면

$$(a-1)(a-b) = -1$$

i)  $a-1 = -1, a-b = 1$ 인 경우

$a = 0, b = -1, a \neq 0$ 이므로 부적합

ii)  $a-1 = 1, a-b = -1$ 인 경우

$$a = 2, b = 3$$

$$\therefore b = 3$$

12. 이차방정식  $5x^2 + 12x - 6 = 0$  의 모든 근  $p$  에 대해서도  $|p| < n$  을 만족하는 최소의 양의 정수  $n$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$p = \frac{-6 \pm \sqrt{66}}{5}$$

$$\left| \frac{-6 - \sqrt{66}}{5} \right| = \left| \frac{6 + \sqrt{66}}{5} \right| < n$$

따라서 최소의 양의 정수  $n$  은 3이다.

13. 이차방정식  $x^2 - 8x + a = 0$  의 해가 정수일 때, 자연수  $a$  의 값 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$x^2 - 8x + a = 0$  의 해  $x = 4 \pm \sqrt{16 - a}$  가 정수이기 위해서는  
근호 안의 수가 제곱수이어야 한다.

$a$  는 자연수이므로  $0 \leq 16 - a < 16$

$16 - a = 0, 1, 4, 9$

$\therefore a = 7, 12, 15, 16$

따라서 가장 큰 수는  $a = 16$  이다.

14. 이차방정식  $-x + 0.4(x^2 + 1) = -\frac{1}{3}(x-1)(2x+3)$  의 두 근을  $\alpha, \beta$  라고 할 때,  $\alpha - \beta$  의 값은? (단,  $\alpha < \beta$ )

①  $\frac{10}{3}$

②  $-\frac{8}{3}$

③  $-1$

④  $3$

⑤  $-\frac{13}{8}$

해설

$$-x + 0.4(x^2 + 1) = -\frac{1}{3}(x-1)(2x+3),$$

$$-x + \frac{2}{5}(x^2 + 1) = -\frac{1}{3}(x-1)(2x+3)$$

양변에 15를 곱하여 정리하면

$$-15x + 6(x^2 + 1) = -5(x-1)(2x+3)$$

$$16x^2 - 10x - 9 = 0$$

근의 공식을 이용하여 근을 구하면

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{16} = \frac{5 \pm 13}{16}$$

$$\therefore x = \frac{9}{8} \text{ 또는 } x = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha < \beta \text{ 이므로 } \alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{9}{8}$$

$$\therefore \alpha - \beta = -\frac{13}{8}$$

15.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$  이고,  $k = f(1) + f(2) + \cdots + f(23) + f(24)$  이다.

$k$  가  $x$  에 관한 이차방정식  $(a+1)x^2 + (a^2-2)x + 8 = 0$  의 한 근일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x+1-x} \\ &= \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(23) + f(24) \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{25} - \sqrt{24} \\ &= -\sqrt{1} + \sqrt{25} \\ &= -1 + 5 = 4 \end{aligned}$$

$(a+1)x^2 + (a^2-2)x + 8 = 0$  에  $x = 4$  를 대입

$$16a + 16 + 4a^2 - 8 + 8 = 0$$

$$4a^2 + 16a + 16 = 0, \quad a^2 + 4a + 4 = 0$$

$$(a+2)^2 = 0 \quad \therefore a = -2$$

$a = -2$  를 식에 대입하면

$$-x^2 + 2x + 8 = 0, \quad -(x+2)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 4$$

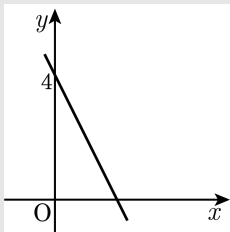
16. 직선  $px - y + 4 = 0$ 이 점  $(p - 2, 3p^2)$ 을 지나고 제3 사분면을 지나지 않을 때,  $p$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = px + 4$ 가 제3 사분면을 지나지 않으려면 다음 그림과 같이 그려져야 한다.



따라서,  $p \leq 0$  이다.

점  $(p - 2, 3p^2)$ 을 지나므로, 대입해주면

$$y = px + 4$$

$$3p^2 = p(p - 2) + 4$$

$$2p^2 + 2p - 4 = 0$$

$$2(p + 2)(p - 1) = 0$$

따라서  $p \leq 0$ 이므로  $p = -2$ 이다.



17. 두 개의 이차방정식  $x^2 + ax + 2 = 0$  과  $x^2 - 2x - a = 0$  은 단 한 개의 공통 해를 갖는다고 한다. 이 때, 공통 해와 양의 실수  $a$  의 값을 구하면?

①  $x = 2, a = -3$

②  $x = 2, a = 3$

③  $x = 1, a = 3$

④  $x = -1, a = -3$

⑤  $x = -1, a = 3$

### 해설

두 방정식의 공통인 해를  $\alpha$  라 하고  $x = \alpha$  를 두 방정식에 각각 대입하면

$$\alpha^2 + a\alpha + 2 = 0 \cdots \textcircled{㉠}, \alpha^2 - 2\alpha - a = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$  하면

$$(a+2)\alpha + (a+2) = 0, (a+2)(\alpha+1) = 0$$

$a = -2$  또는  $\alpha = -1$  에서  $a > 0$  이므로  $\alpha = -1$

$\alpha = -1$  을  $\textcircled{㉠}$  에 대입하면

$$1 - a + 2 = 0 \quad \therefore a = 3$$

18. 이차방정식  $\frac{1}{12}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{2x}$  의 양의 근을  $\alpha$  라고 할 때,  $\alpha^2 + 4\alpha$  의 값은?

①  $24 + 5\sqrt{21}$

②  $26 + 6\sqrt{23}$

③  $28 + 7\sqrt{26}$

④  $32 + 8\sqrt{23}$

⑤  $34 + 8\sqrt{22}$

해설

$$\frac{1}{12}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{2x} \text{ 의 양변에 } 12x \text{ 를 곱하면}$$

$$x^2 - 4x - 18 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 18 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 22$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{22}$$

$$\alpha \text{ 는 양의 근이므로 } \alpha = 2 + \sqrt{22}$$

$$\therefore \alpha^2 + 4\alpha = 34 + 8\sqrt{22}$$

19. 이차방정식  $x^2 - 6x - n = 0$  의 해가 정수가 되도록 하는 두 자리의 정수  $n$  의 개수를 구하여라.

▶ 답 :      개

▷ 정답 : 6 개

해설

$x = 3 \pm \sqrt{9+n}$  이므로 해가 정수가 되기 위해서는  
 $9+n = (\text{완전제곱수})$  이고  $n$  은 두 자리의 정수이므로  
 $9+n = 25, 36, 49, \dots, 100$   
 $n = 16, 27, 40, 55, 72, 91$  의 6 개이다.