1. $A = 4xy^2 - 2x^2y + 3x^2y^2$, $B = x^2y - 3x^2y^2 - 2xy^2$ 일 때, $A + 2B$ 를 간단히 하면?

① xy^2 ② x^2y ③ x^2y^2
④ $-2xy^2$ ⑤ $-3x^2y^2$

해설

$A + 2B$
$= (4xy^2 - 2x^2y + 3x^2y^2) + (2x^2y - 6x^2y^2 - 4xy^2)$
$= -3x^2y^2$

해설

2. $(2x^3-3x+1)\div(x^2+2)$ 의 계산에서 나머지는?

① $-5x+1$ ② $-x+1$ ③ $5x+1$
④ $x+1$ ⑤ $-7x+1$

해설
$2x^3-3x+1$ 을 x^2+2 로 직접 나누어서 구한다.
몫 : $2x$, 나머지 : $-7x+1$

3. 다항식 $(5x^2+3x+1)^2$ 을 전개하였을 때, x^2 의 계수는?

① 10 ② 13 ③ 16 ④ 19 ⑤ 25

해설

$(5x^2+3x+1)(5x^2+3x+1)$ 에서
ⅰ) (일차항)×(일차항) 의 경우 $9x^2$
ⅱ) (이차항)×(상수항) 의 경우 $2\times 5x^2$
즉, $5x^2+5x^2+9x^2=19x^2$
$\therefore$ 19

4. 복소수 $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ 에 대하여 z^2 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $z^2 = i$

해설

$z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ 이므로 $z^2 = \dfrac{1+2i-1}{2} = i$

5. 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 가 $z\bar{z} = 4$ 를 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$z = x + yi$ 에서 $\bar{z} = x - yi$ 이므로
$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$
주어진 조건에서 $z \cdot \bar{z} = 4$ 이므로
$x^2 + y^2 = 4$

6. $\dfrac{2x+1}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$가 $x\neq1$인 모두 실수 x에 대해 항상 성립 하도록 $a,\ b,\ c$를 구할 때, $a+b+c$의 값은?

① 2　② −2　③ 1　④ −1　⑤ 0

해설

우변의 분모를 통분하면

$\dfrac{a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)}{x^3-1}$

$=\dfrac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$

$\therefore\ \dfrac{2x+1}{x^3-1}=\dfrac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$

분자의 계수를 비교하면

$a+b=0,\ a-b+c=2,\ a-c=1$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1,\ c=0$

$\therefore a+b+c=0$

7. 다항식 $6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$을 $3x - 2$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $Q(1) + R$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$6x^3 - 7x^2 + 17x - 3 = (3x - 2)Q(x) + R$
양변에 $x = 1$을 대입하면, $13 = Q(1) + R$
$\therefore\ Q(1) + R = 13$

해설

$6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$를 $3x - 2$로 직접 나누거나 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

8. 다항식 $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + k$가 일차식 $x - 1$을 인수로 가질 때, 이 다항식 $f(x)$를 인수분해 하면?

① $(x-2)(x-1)(x+1)$ ② $(x-1)x(x+2)$

③ $(x+1)(x-1)(x+2)$ ④ $(x-2)(x-1)(x+2)$

⑤ $(x-2)(x+1)(x+2)$

해설

$f(x) = (x-1)Q(x) \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0$

$\therefore\ f(1) = 2 + k = 0, \qquad \therefore\ k = -2$

즉, $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$= (x-1)(x+1)(x+2)$

9. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 놓으면,
$x=-1$일 때, $-1-4-1+6=0$
따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.
즉, $f(x)=(x+1)Q(x)$ 몫
$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x^2-5x+6)(x+1)$
$\therefore\ f(x)=(x-3)(x-2)(x+1)$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(-3)^2+(-2)^2+1^2=14$

10. 이차방정식 $x^2+(a+2)x+1=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면
$D=(a+2)^2-4=0$이므로
$a^2+4a+4-4=a^2+4a=0$
따라서 $a=0$또는 $a=-4$
따라서 상수 a의 값의 합은 -4

11. x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이 허근을 가질 때, $k>m$이다. m의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이
허근을 가지려면
$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)<0$
$(k^2-2k+1)-(k^2-1)<0$
$-2k+2<0,\ k>1$
$\therefore\ m=1$

12. 이차식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4=0$
이 중근을 갖는다.
따라서, $\frac{D}{4}=(k-1)^2-(2k^2-6k+4)=0$
위의 식을 정리하면
$-k^2+4k-3=0$
$k^2-4k+3=0$
$(k-1)(k-3)=0$에서
$k=1$ 또는 $k=3$

13. 다음의 이차방정식에 대한 설명 중 틀린 것은? (단, a, b, c는 실수이다.)

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

② 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β, $D=b^2-4ac$라고 하면 $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{D}{a^2}$이다.

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ab<0$이다.

④ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면, $x^2+(a-2c)x+b-ac$도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$(단, $a\neq 0$)

해설

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ac<0$이다.

14. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x = -1$ 에서 최댓값 7 을 갖고, $f(2) = -2$ 를 만족할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 3　② 7　③ 11　④ -3　⑤ -5

해설

$f(x) = a(x+1)^2 + 7, f(2) = -2$
$\Rightarrow 3^2 \times a + 7 = -2, a = -1$
$\therefore\ f(x) = -(x+1)^2 + 7 = -x^2 - 2x + 6$
따라서 $a + b + c = 3$

15. 두 다항식 $f(x) = x^3 - ax + b, g(x) = x^2 + ax - 2b$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, $f(x), g(x)$ 의 최소공배수를 구하면?

① $(x-1)^2(x+1)(x+2)$ ② $(x-1)^2(x+4)(x+2)$
③ $(x-1)(x+1)^2(x+2)$ ④ $(x-1)(x+4)^2(x+2)$
⑤ $(x-1)(x+4)(x+2)^2$

해설

인수정리에 의해
$f(1) = 1 - a + b = 0$
$g(1) = 1 + a - 2b = 0$
연립하면, $a = 3, b = 2$
$\therefore f(x) = x^3 - 3x + 2$
조립제법을 이용하면,
$f(x) = (x-1)^2(x+2)$
$g(x) = x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$
$\therefore$ 최소공배수: $(x-1)^2(x+4)(x+2)$

16. 두 다항식 A, B에 대하여 $A = x^2 + ax + 2,\ B = x^2 + bx + c$이고 A, B의 최대공약수가 $x + 1$, 최소공배수가 $x^3 + 2x^2 - x - 2$일 때, $a + b + c$의 값은 ?

① -1　　② 0　　③ 2　　④ -2　　⑤ 3

해설

$A = m(x+1),\ B = n(x+1)$이라 놓으면
$mn(x+1) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
$\therefore\ mn = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$
$\therefore\ m = x+2,\ n = x-1$ 또는 $m = x-1,\ n = x+2$
$A = (x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$
$B = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$
여기서, $a = 3,\ b = 0,\ c = -1$
$\therefore\ a + b + c = 2$

17. 두 다항식 A, B의 최대공약수 G를 $A * B$, 최소공배수 L을 $A \bigstar B$로 나타내기로 할 때, $(A^2 * B^2) \bigstar (A^2 * AB)$와 같은 것은?

① AG　② A　③ AL　④ AB　⑤ I

해설

$A = Ga,\ B = Gb$(a, b는 서로소)로 놓으면

$(A^2 * B^2) \bigstar (A^2 * AB)$

$= (G^2a^2 * G^2b^2) \bigstar (G^2a^2 * G^2ab)$

$= G^2 \bigstar G^2a$

$= G^2a$

$= AG$

18. 두 곡선 $y=x^2$과 $y=-x^2+2x-5$에 동시에 접하는 접선은 두 개가 있다. 이 두 접선의 y절편의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y=x^2$ 위의 접점을 $(t,\ t^2)$으로 놓으면
$y'=2x$이므로 $y'_{x=t}=2t$는 접선의 기울기이다.
따라서 접선의 방정식은
$y-t^2=2t(x-t)\cdots$ ㉠
㉠이 곡선 $y=-x^2+2x-5$에도 접하므로
$2tx-t^2=-x^2+2x-5$ 에서
$x^2+2(t-1)x+(5-t^2)=0\cdots$ ㉡
㉡의 판별식 $\dfrac{D}{4}=0$이므로
$(t-1)^2-(5-t^2)=0$에서
$(t+1)(t-2)=0\quad \therefore\ t=-1,\ 2$
㉠에서
$t=-1$일 때, $y=-2x-1$
$t=2$일 때, $y=4x-4$
따라서 두 y절편의 곱은 $(-1)\cdot(-4)=4$

19. 이차함수 $y = -2x^2 + bx + c$ 가 $x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가질 때, 상수 b, c 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $b = 8$

▷ 정답 : $c = -3$

해설

꼭짓점의 좌표가 (2, 5) 이므로 이차함수의 식은 $y = -2(x-2)^2+5$ 이다.
$y = -2(x-2)^2 + 5$ 을 전개하면 $y = -2x^2 + 8x - 3$ 이므로 $b = 8, c = -3$ 이다.

20. 지면으로부터 초속 30m 로 위로 던진 공의 t 초 후의 높이를 hm 라고 하면 $h = -5t^2 + 30t$ 인 관계가 성립한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이를 구하여라.

▶ 답 : __________ m

▷ 정답 : 45 m

해설

$h = -5t^2 + 30t$ 에서 $h = -5(t-3)^2 + 45$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 45m 이다.

21. $x+y+2z=1,\ 2x-y+z=5$를 만족하는 모든 실수 x, y, z에 대하여 $ax^2+by^2+cz^2=6$이 성립할 때, $3a+2b+c$의 값은 얼마인가?

① 12　　② 8　　③ 4　　④ 0　　⑤ −2

해설

$x+y+2z=1 \cdots$ ①
$2x-y+z=5 \cdots$ ②
① + ②: $x+z=2 \Rightarrow z=2-x$
② ×2−① : $x-y=3 \Rightarrow y=x-3$
$\therefore ax^2+by^2+cz^2=6$
$\Rightarrow ax^2+b(x-3)^2+c(2-x)^2$
$=(a+b+c)x^2-(4c+6b)x+9b+4c=6$
모든 실수 x, y, z에 대해 성립하려면
$a+b+c=0,\ 4c+6b=0,\ 9b+4c=6$
위의 식을 연립하여 풀면, $a=1,\ b=2,\ c=-3$
$\therefore\ 3a+2b+c=4$

22. 모든 실수 x에 대하여 $x^{10}+1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{10}(x-1)^{10}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}\cdots$①

양변에 $x=2$을 대입하면

$2^{10}+1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}\cdots$②

①+②에 의해

$2^{10}+2=2\left(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}\right)$

$\therefore\left(a_0+a_2+\cdots+a_{10}\right)=2^9+1=513$

23. 복소수 $\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수) 에 대하여 $\alpha^{*} = b + ai$ 로 나타낸다.$\alpha = \dfrac{4+3i}{5}$ 일 때, $5\alpha^{5}(\alpha^{*})^{4}$ 의 값을 구하면?

① $4+3i$　　② $3+3i$　　③ $2+3i$

④ $1+3i$　　⑤ $-1+3i$

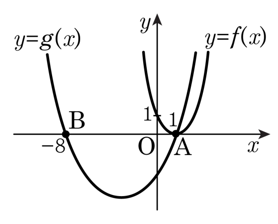
해설

$$\begin{aligned}\alpha\alpha^{*} &= (a+bi)(b+ai)\\ &= ab + a^2 i + b^2 i - ab = (a^2+b^2)i\end{aligned}$$

$\alpha = \dfrac{4+3i}{5}$ 이므로 $\alpha\alpha^{*} = \left\{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right\}i = i$

$$\begin{aligned}\therefore\ 5\alpha^{5}(a^{*})^{4} &= 5\alpha(\alpha \cdot a^{*})^{4}\\ &= 5 \cdot \frac{4+3i}{5} \cdot i^{4}\\ &= 4+3i\end{aligned}$$

24. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x축과 점 A$(1,\ 0)$에서 접하고, 이차함수 $y = g(x)$의 그래프는 x축과 두 점 A$(1,\ 0)$, B$(-8,\ 0)$에서 만난다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 x^2의 계수가 모두 1일 때, 방정식 $f(x) + 2g(x) = 0$의 근은?



① $x = 1$ ② $x = -\frac{1}{3}$ 또는 $x = 1$

③ $x = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = 3$ ④ $x = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = 1$

⑤ $x = -5$ 또는 $x = 1$

해설

$f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = (x+8)(x-1)$이므로

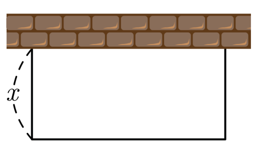
$f(x) + 2g(x) = (x-1)^2 + 2(x+8)(x-1) = 3x^2 + 12x - 15$

따라서, 방정식 $f(x) + 2g(x) = 0$,

즉 $3x^2 + 12x - 15 = 0$ 의 근은 $3(x+5)(x-1) = 0$

$\therefore x = -5$ 또는 $x = 1$

25. 다음 그림과 같이 20m 인 철망으로 직사각형의 모양의 닭장을 만들려고 한다.
넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?



① 3 m　② 4 m　③ 5 m
④ 6 m　⑤ 7 m

해설

직사각형의 세로의 길이를 x , 가로의 길이를 $20-2x$ 라고 하면,

$$\begin{aligned} y &= x(20-2x) \\ &= -2x^2 + 20x \\ &= -2(x-5)^2 + 50 \end{aligned}$$

$x = 5$ 일 때, 최댓값은 50 이다.