1. $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$ 가 $x-y-1 \neq 0$ 인 어떤 $x,\ y$의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}=k$라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

$x,\ y$에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 $x,\ y$에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0,\ a+k=0,\ -b+k=0$

$\therefore\ k=2,\ a=-2,\ b=2$

$\therefore\ a-b=-4$

2. 최고차항의 계수가 1 인 두 이차식의 최대공약수가 $x+3$ 이고 최소공배수가 x^3+x^2-6x 일 때, 두 이차식의 합은?

① $(x+1)(x-2)$ ② $(x+2)(x+4)$
③ $2(x-1)(x+3)$ ④ $2(x-2)(x-4)$
⑤ $2(x+1)(x-4)$

해설

최대공약수가 $x+3$ 이므로 두 이차식을
$a(x+3)$, $b(x+3)$ (a, b 는 서로소)라 하고
최소공배수를 $f(x)=x^3+x^2-6x$ 라 하면
$f(x)=x(x^2+x-6)=x(x+3)(x-2)$
따라서 두 다항식은
$x(x+3)$, $(x-2)(x+3)$ 이므로
구하는 두 다항식의 합은
$$x(x+3)+(x-2)(x+3)=(x+3)(2x-2)$$
$$=2(x-1)(x+3)$$

3. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=-\sqrt{-6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=3i$

㉢ $\sqrt{-27}-\sqrt{-3}=2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}}=-2i$

㉤ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{5}=-\sqrt{10}$

㉥ $\sqrt{(-3)^2}+(\sqrt{-3})^2=6$

① ㉠,㉡　② ㉢,㉣　③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥　⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i=-\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}=-3i$

㉢ $\sqrt{-27}-\sqrt{-3}=3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i=2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}}=\dfrac{4}{2i}=-2i$

㉤ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{2}i\times\sqrt{5}=\sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2}+(\sqrt{-3})^2=\sqrt{9}+(\sqrt{3}i)^2=0$

4. 복소수 $z = x + yi$를 좌표평면 위에 점 $p(x,\ y)$에 대응시킬 때, $(3-4i)z$가 실수가 되게 하는 점 p의 자취가 나타내는 도형은?

① 기울기가 양인 직선
② 기울기가 음인 직선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 아래로 볼록한 포물선
⑤ 원

해설

$$\begin{aligned}(3-4i)z &= (3-4i)(x+yi)\\ &= (3x+4y)+(-4x+3y)i\end{aligned}$$

실수가 되려면 허수부 $-4x+3y=0$이다.

$\therefore y = \frac{4}{3}x$ (⇒ 기울기가 양인 직선)

5. 복소수 $(1-xi)(1-i)$가 순허수가 되도록 실수 x의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

$(1-xi)(1-i)=(1-x)+(-1-x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1-x=0$,
$x=1$

6. 다음 보기 중 옳은 것의 개수는? (단, $i = \sqrt{-1}$)

ㄱ 16의 제곱근은 4이다.

ㄴ 실수를 제곱하면 양수 또는 0이다.

ㄷ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z + \bar{z}$ 는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수)

ㄹ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z\bar{z}$는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

ㅁ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z = \bar{z}$이면 z는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

ㄱ 제곱해서 16 이 되는 수 4, −4 ∴ 거짓
ㄴ 실수는 제곱하면 0보다 크거나 같다. ∴ 참
ㄷ $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $z + \bar{z} = 2a$ ∴ 참
ㄹ $z\bar{z} = a^2 + b^2$ ∴ 참
ㅁ $z = \bar{z}$, $a + bi = a - bi$, $2bi = 0$, $b = 0$ ∴ $z = a = \bar{z}$ ∴ 참

7. 방정식 $|x-3|+|x-4|=2$ 의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

ⅰ) $x<3$ 일 때,

$-(x-3)-(x-4)=3,\ -2x=-5$

$\therefore\ x=\frac{5}{2}$

ⅱ) $3\le x<4$ 일 때

$(x-3)-(x-4)=2,\ 0\cdot x=1$

∴ 해가 없다.

ⅲ) $x\ge 4$ 일 때

$x-3+x-4=2,\ 2x=9$

$\therefore\ x=\frac{9}{2}$

따라서 $x=\frac{5}{2},\ \frac{9}{2}$ 이고 그 합은 7

8. x에 대한 이차방정식 $x^2+mx+6=0$의 두 근 a, b에 대하여 $|a-b|=1$이 성립할 때, $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}$의 값은? (단, $m<0$)

① $-1-\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $2-\sqrt{3}$

④ $1+\sqrt{2}$ ⑤ $-2+\sqrt{5}$

해설

$x^2+mx+6=0$의 두 근이 $a,\ b$

$a+b=-m,\ ab=6$

$|a-b|=1$

$|a-b|^2=(a+b)^2-4ab$

$=m^2-24=1$

$m^2=25\ \therefore\ m=-5(\because\ m<0)$

$x^2-5x+6=0$

$(x-3)(x-2)=0$

$a=3,\ b=2$

$\therefore\ \sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$

9. 두 이차함수의 그래프 $y = x^2 - 2ax + 4,\ y = 2x^2 - 2ax + a^2 + 3a$가 모두 x축과 교점을 갖도록 상수 a의 값의 범위를 정하면?

① $-9 \le a \le -5$　② $-6 \le a \le -2$　③ $-3 \le a \le 0$

④ $2 \le a \le 5$　⑤ $3 \le a \le 7$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4$의 그래프가 x 축과 교점을 가지려면
$x^2 - 2ax + 4 = 0$에서

$\frac{D_1}{4} = a^2 - 1 \cdot 4 \ \ge 0,\ a^2 - 4 \ge 0,\ (a+2)(a-2) \ge 0$

$\therefore a \le -2$ 또는 $a \ge 2 \cdots\cdots$ ㉠

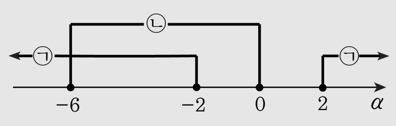
또, 이차함수 $y = 2x^2 - 2ax + a^2 + 3a$의 그래프가 x 축과 교점을 가지려면

$2x^2 - 2ax + (a^2 + 3a) = 0$에서

$\frac{D_2}{4} = a^2 - 2(a^2 + 3a) \ge 0,\ a^2 + 6a \le 0,\ a(a+6) \le 0$

$\therefore -6 \le a \le 0 \cdots\cdots$ ㉡

이 때, ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



(1) 두 그래프 모두 x축과 교점을 갖도록 하는 a의 값의 범위는 위의 수직선에게 ㉠과 ㉡의 공통 부분이므로 $-6 \le a \le -2$

10. 방정식 $(x^2+x+2)^2+8=12(x^2+x)$ 의 모든 근의 합은?

① 1　② 0　③ -1　④ -2　⑤ -3

해설

$x^2+x=Y$ 라 하면, $(Y+2)^2+8=12Y$
$Y^2-8Y+12=0$, $(Y-2)(Y-6)=0$
$Y=2$ 또는 $Y=6$
(i) $Y=2$
$x^2+x-2=0 \Rightarrow x=-2$ 또는 $x=1$
(ii) $Y=6$
$x^2+x-6=0 \Rightarrow x=-3$ 또는 $x=2$
$\therefore$ 모든 근의 합 $=-2$

11. $a^2 = 3$일 때, 다음 식의 값을 구하면?

$P = \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2$

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$(2+a)^n = \alpha,\ (2-a)^n = \beta$로 놓으면

$$
\begin{aligned}
P &= \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2 \\
&= (\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 = 4\alpha\beta \\
&= 4(2+a)^n(2-a)^n = 4(4-a^2)^n \\
&= 4(4-3)^n = 4
\end{aligned}
$$

12. $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$이고 $abc=1$ 일 때, $(a^3+b^3+c^3)^2$의 값을 계산하면?

① 1　　② 4　　③ 9　　④ 16　　⑤ 25

해설

$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=(a+b+c)\times 0+3abc=0+3\cdot(1)=3$
$\therefore (a^3+b^3+c^3)^2=9$

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \; a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=0$
$\frac{1}{2}\left(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$
$\therefore a=b=c \rightarrow abc=a^3=b^3=c^3=1$
$(a^3+b^3+c^3)^2=(1+1+1)^2=9$

13. x에 대한 삼차식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+8$은 $(x+2)^2$으로 나누어 떨어지고, $1-f(x)$는 x^2-1로 나누어 떨어질 때, $f(x)$의 상수항은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

$f(x)+8=(x+2)^2(ax+b)\cdots$㉠
$1-f(x)=(x^2-1)Q(x)\cdots$㉡
㉡에서 $f(1)=1,\ f(-1)=1$
그러므로 ㉠에서
$1+8=9(a+b)\cdots$㉢
$1+8=-a+b\cdots$㉣
㉢, ㉣에서 $a=-4,\ b=5$
$\therefore\ f(x)=(x+2)^2(-4x+5)-8$
$\therefore$ 상수항은 $f(0)=2^2\cdot 5-8=12$

14. 다항식 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$가 이차다항식의 완전제곱꼴이 되도록 a의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$

$=(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+a$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+a$

$x^2+8x=A$로 놓으면

(준식) $=(A+7)(A+15)+a$

$=A^2+22A+105+a$

$=(A+11)^2-16+a$

따라서, $a=16$일 때 이차식 $x^2+8x+11$의 완전제곱식이 된다.

15. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots + 99^2$ 을 계산하여라.

① 99　　② 100　　③ 4950
④ 5050　　⑤ 10000

해설

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots + 99^2$
$= 99^2 - 98^2 + 97^2 - 96^2 + \cdots + 3^2 - 2^2 + 1^2$
$= (99^2 - 98^2) + (97^2 - 96^2) +$
$\cdots + (3^2 - 2^2) + 1^2$
$= (99-98)(99+98)+(97-96)(97+96)+\cdots+(3-2)(3+2)+1$
$= (99 + 98) + (97 + 96) + \cdots + (3 + 2) + 1$
$= 1 + 2 + 3 + \cdots + 99$
$= (1 + 99) + (2 + 98) + \cdots + (49 + 51) + 50$
$= 4950$

16. x에 관한 세 개의 다항식 $A(x) = x^4 - 10x^2 + 9$, $B(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$, $C(x) = x(x-3)(x^2+a) - (x-3)(x^2+b) + 8$의 최대공약수가 이차식일 때, $a+b$의 값은?

① 4　　② -4　　③ 8　　④ -8　　⑤ 2

해설

$A(x) = x^4 - 10x^2 + 9 = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$
$B(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$
$\quad = (x-1)(x+1)(x-3)(x+2)$
$\therefore$두 다항식의 최대공약수는$(x-1)(x+1)(x-3)$
그런데 다항식 $C(x)$는 $x-3$으로 나누어떨어지지 않으므로
세 다항식의 최대공약수는$(x-1)(x+1)$이다.
$\therefore$ 다항식 $C(\pm 1) = 0$
$\therefore\ C(1) = -a + b + 4 = 0,\ C(-1) = a + b + 4 = 0$
$\therefore\ a = 0,\ b = -4$에서 $a + b = -4$

17. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{98}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\frac{1-i}{1+i}=-i$, $\frac{1+i}{1-i}=i$ 이므로

$f(\frac{1-i}{1+i})+f(\frac{1+i}{1-i})$

$=f(-i)+f(i)$

$=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{98}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{98}$

$=i^{98}+(-i)^{98}$

$=i^2+i^2$

$=-2$

18. 복소수 $z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$z^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$
$$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$$
$$=\left(\frac{-3-3\sqrt{3}i-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i-3+3\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$=(-2-\sqrt{3}i)^2+(-2+\sqrt{3}i)^2$$
$$=4+4\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3=2$$

해설

$$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$
$$=\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z+1=\sqrt{3}i$
양변을 제곱하면

$4z^2+4z+1=-3$
$\to 4z^2+4z+4=0$
$\to z^2+z+1=0$
$\to (z-1)(z^2+z+1)=0$
$\to z^3-1=0$
$\to z^3=1$

※방정식에 익숙한 학생들은
$z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 바로 $z^2+z+1=0$ 와 $z^3=1$ 을 도출할 수 있을 것이다.

$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$
$=10z^4+12z^3+10z^2$
$=(10z^4+10z^3+10z^2)+2z^3$
$=10z^2(z^2+z+1)+2z^3$
$=0+2$
$=2$

19. 이차방정식 $x^2-ax+a^2-4=0$에서 한 근만이 양이기 위한 a의 값의 범위를 구하면?

① $-1<a\le 0$　② $0<a\le 1$　③ $1<a\le 2$
④ $-2<a\le 2$　⑤ $-1<a\le 2$

해설

(ⅰ) $\alpha>0,\ \beta<0$일 때, $\alpha\beta=a^2-4<0$
$\therefore\ -2<a<2$
(ⅱ) $\alpha>0,\ \beta=0$일 때,
$\alpha+\beta=a>0,\ \alpha\beta=a^2-4=0$
$\therefore\ a=2$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $-2<a\le 2$

20. $y = x^2 + (m-1)x + m$, $y = x$ 를 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 없도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $4 - 2\sqrt{2} \leq m \leq 4 + 2\sqrt{2}$

② $4 - 2\sqrt{3} < m < 4 + 2\sqrt{3}$

③ $2 - 2\sqrt{3} < m < 2 + 2\sqrt{3}$

④ $m \leq 4 - 2\sqrt{2}$ 또는 $m \geq 4 + 2\sqrt{2}$

⑤ $m < 4 - 2\sqrt{3}$또는 $m > 4 + 2\sqrt{3}$

해설

두 함수 $y = x^2 + (m-1)x + m,\ y = x$의 그래프는 교점이 없어야 한다.

$x^2 + (m-1)x + m = x,$

$x^2 + (m-2)x + m = 0$에서

$D = (m-2)^2 - 4m < 0$

$m^2 - 8m + 4 < 0$

$\therefore 4 - 2\sqrt{3} < m < 4 + 2\sqrt{3}$

21. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 일 때, 최솟값 -3 을 갖고, 그래프가 점 $(-1,\ 6)$ 을 지난다고 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

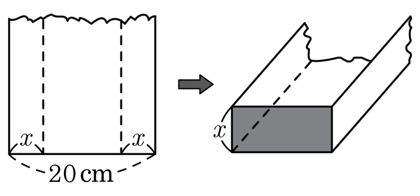
▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -3)$ 이므로 $y = a(x-2)^2 - 3$
점 $(-1,\ 6)$ 을 대입하면 $a = 1$
$y = (x-2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$ 에서
$a = 1$, $b = -4$, $c = 1$
따라서 $a + b + c = -2$ 이다.

22. 그림과 같이 너비가 20 cm 인 철판의 양쪽을 접어 물받이를 만들려고 한다. 색칠한 부분의 넓이가 최대가 되게 하려면 높이를 몇 cm 로 해야 하는지 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 5 cm

해설

색칠한 부분의 넓이를 y라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(20-2x) \\ &= -2x^2+20x \\ &= -2(x-5)^2+50 \end{aligned}$$

따라서 높이는 5 cm로 해야한다.

23. 사차방정식 $x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 해는?

① $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$
② $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$
③ $x=\dfrac{-15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
④ $x=\dfrac{15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$
⑤ $x=15\pm\sqrt{221}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

해설

$x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 양변을
x^2으로 나누면

$x^2+8x+17+\dfrac{8}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2+8\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+17=0$

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=A$라 하자.

$A^2+8A+15=(A+3)(A+5)$

$=\left(x+\dfrac{1}{x}+3\right)\left(x+\dfrac{1}{x}+5\right)=0$

$(x^2+3x+1)(x^2+5x+1)=0$

$\therefore x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

24. $a+b=1$ 이고 $a^2+b^2=-1$ 일 때, $a^{2005}+b^{2005}$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$b=1-a$ 를 a^2+b^2 에 대입하여 정리하면
$a^2-a+1=0$ $(a+1)(a^2-a+1)=0$
$a^3+1=0$ $\quad\therefore\ a^3=-1$
마찬가지 방법으로 $b^3=-1$
$a^{2005}+b^{2005}=(a^3)^{668}\cdot a+(b^3)^{668}\cdot b=a+b=1$

해설

a^3, b^3 의 값을 다음과 같이 구해도 된다.
$a^2-a+1=0$ 에서 $a^2=a-1$
$a^3=a^2\cdot a=(a-1)\cdot a=a^2-a=-1$
마찬가지 방법으로 $b^3=-1$

25. n이 자연수일 때, 다항식 $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $9^n(x-3)$이 될 때, $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x^{2n}(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+9^n(x-3)$

$x^{2n}(x-3)(x-\alpha)=(x-3)\,(x-3)Q(x)+9^n\}$ 라 놓으면,

$x^{2n}(x-\alpha)=(x-3)Q(x)+9^n$ 이고

양변에 $x=3$을 대입하면, $9^n(3-\alpha)=9^n$

$\therefore\ 3-\alpha=1,\quad \alpha=2$

그러므로 $a=-5,\ b=6$이 된다.

따라서 $a+b=1$

26. x에 대한 항등식 $x^{1997}+x+1$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$의 모든 계수와 상수항의 합을 구하면?

① 997 ② 998 ③ 1997 ④ $\frac{1997}{2}$ ⑤ $\frac{1997}{3}$

해설

$x^{1997}+x+1=(x^2-1)Q(x)+ax+b$라 하면
$x=1$일 때, $3=a+b$
$x=-1$일 때, $-1=-a+b$
$\therefore\ a=2,\ b=1$
$\therefore\ x^{1997}+x+1=(x^2-1)Q(x)+2x+1$
$x^{1997}-x=(x^2-1)Q(x)$
$x(x-1)(x^{1995}+x^{1994}+\cdots+x+1)$
$=(x-1)(x+1)Q(x)$
$\therefore\ x(x^{1995}+x^{1994}+\cdots+x+1)=(x+1)Q(x)$
$Q(1)$이 $Q(x)$의 모든 계수의 합이므로 $x=1$을 대입하면
$2Q(1)=1996 \quad \therefore\ Q(1)=\frac{1996}{2}=998$

27. 다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지가 $2x+1$이고, $(x-2)^3$으로 나눈 나머지가 x^2-x+6이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-2)^2$으로 나눈 나머지는?

① $3x+1$　　② $3x-2$　　③ $3x+2$

④ x^2-2x+1　　⑤ x^2-x+6

해설

$f(x)=(x+1)^2A(x)+2x+1$에서 $f(-1)=-1$

$$f(x)=(x-2)^3B(x)+x^2-x+6$$
$$=(x-2)^3B(x)+(x-2)^2+3x+2$$
$$=(x-2)^2\{(x-2)B(x)+1\}+3x+2$$

즉 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지는 $3x+2$

구하는 나머지를 ax^2+bx+c라 하면

$$f(x)=(x+1)(x-2)^2Q(x)+ax^2+bx+c$$
$$=(x+1)(x-2)^2Q(x)+a(x-2)^2+3x+2$$

$f(-1)=9a-1=-1$　$\therefore a=0$

$ax^2+bx+c=a(x-2)^2+3x+2$

$\therefore$구하는 나머지는 $3x+2$

28. a, b 가 양의 정수이고, 다항식 $f(x) = x^4 + ax^3 + x^2 + bx - 2$ 이다. $f(x)$ 가 일차식 $x - \alpha$ 를 인수로 갖게 하는 정수 α 의 값과 $a, b(a > b)$ 의 값에 대하여 $\alpha^2 + a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

α가 될 수 있는 상수항 -2의 약수인 ± 1, ± 2을 준식에 차례로 대입해 보면

$f(1) = 1 + a + 1 + b - 2 = 0,\ a + b = 0$

$f(-1) = 1 - a + 1 - b - 2 = 0,\ a + b = 0$

$f(2) = 16 + 8a + 4 + 2b - 2 = 0,\ 4a + b = -9$

$f(-2) = 16 - 8a + 4 - 2b - 2 = 0,\ 4a + b = 9$

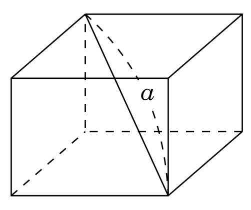
그런데, 위의 세 식은 a, b가 양의 정수라는 조건을 충족시키지 못한다.

$\therefore\ \alpha = -2$ 이고 $4a + b = 9$

$\alpha = -2,\ a = 2,\ b = 1\ (\because\ a > b)$

$\therefore\ \alpha^2 + a^2 + b^2 = 9$

29. 다음 그림과 같은 직육면체에서 대각선의 길이가 a이고, 모든 모서리의 길이의 합이 b일 때, 이 직육면체의 겉넓이는?



① $\frac{1}{16}b^2 - a^2$ ② $\frac{1}{8}b^2 - a^2$ ③ $\frac{1}{4}b^2 - a^2$
④ $\frac{1}{8}b^2 + a^2$ ⑤ $\frac{1}{16}b^2 + a^2$

해설

가로, 세로의 길이와 높이를 각각 x, y, z라 하면

$4(x+y+z) = b,\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = a$

$\therefore\ x+y+z = \frac{1}{4}b,\ x^2+y^2+z^2 = a^2$

따라서, 구하는 직육면체의 겉넓이는

$$
\begin{aligned}
2(xy+yz+zx) &= (x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2) \\
&= \left(\frac{1}{4}b\right)^2 - a^2 \\
&= \frac{1}{16}b^2 - a^2
\end{aligned}
$$

30. 0이 아닌 세 실수 a, b, c가 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c}$를 만족할 때, 이차방정식 $cx^2 + bx + a = 0$의 한 근을 복소수 α라 하자. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$	㉡ $\alpha + \overline{\alpha} = -1$
㉢ $\frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$	㉣ $\alpha^2 = \overline{\alpha}$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉡, ㉢　③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} = k \Rightarrow b = ak,\ c = bk,\ a = ck$

변변끼리 곱하면 $abc = abck^3$

$abc \neq 0$이므로 $k^3 = 1$

$\therefore k = 1 \quad \therefore\ a = b = c$

$cx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$

한 근을 α라 하면 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이다

㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

㉡ $\alpha + \overline{\alpha} = -1$

㉢ $\alpha\overline{\alpha} = 1,\ \frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$

㉣ $x^2 + x + 1 = 0$의 근을 구해보면

$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \overline{\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \alpha^2 = \overline{\alpha}$

31. 방정식 $x^2 - x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \alpha$, $f(1) = 1$을 만족시키는 이차식 $f(x)$를 구하면?

① $f(x) = x^2 - x + 1$

② $f(x) = x^2 - 2x + 2$

③ $f(x) = x^2 + x - 1$

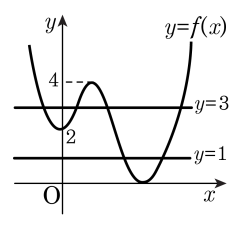
④ $f(x) = x^2 + 2x - 2$

⑤ $f(x)$는 모두 4개 있을 수 있다.

해설

$x^2 - x + 1 = 0$의 두 근이 α, β이므로
근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = 1$
$\therefore\ f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \alpha$에서
즉, α, β는 $f(x) = 1 - x$의 두 근이다.
따라서, 다항식 $f(x) + x - 1$은
$(x - \alpha)(x - \beta)$를 인수로 가진다.
그런데 $f(x)$가 이차식이므로
$f(x) + x - 1 = a(x - \alpha)(x - \beta) = a(x^2 - x + 1)$
$f(x) = ax^2 - (a + 1)x + a + 1$,
$f(1) = a - (a + 1) + a + 1 = 1$
$\therefore\ a = 1$
따라서, 구하는 이차식은 $f(x) = x^2 - 2x + 2$

32. 사차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 방정식
$\left\{f(x)\right\}^2 = 4f(x) - 3$ 의 실근의 개수는?



① 1 개　② 2 개　③ 3 개
④ 4 개　⑤ 6 개

해설

$\{f(x)\}^2 = 4f(x) - 3$ 을 인수분해하면
$\left\{f(x) - 1\right\}\left\{f(x) - 3\right\} = 0$
$\therefore f(x) = 1$ 또는 $f(x) = 3$
따라서, 위의 그래프와 같이
$f(x) = 1$ 과 $f(x) = 3$ 을 만족하는 x 는
각각 2 개와 4 개이므로 실근의 개수는 6 개이다.

33. 두 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x^2}{3} + (y-2)^2 = 1$ 이 성립할 때, $x^2 + y^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\frac{x^2}{3} + (y-2)^2 = 1$ 에서 $x^2 = -3y^2 + 12y - 9$를 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x^2 + (-3y^2 + 12y - 9) + y^2 \\ &= -2y^2 + 12y - 9 \\ &= -2(y-3)^2 + 9 \end{aligned}$$

그런데 x, y 는 실수이므로
$x^2 = -3y^2 + 12y - 9 \geq 0$
$-3y^2 + 12y - 9 \geq 0$, $y^2 - 4y + 3 \leq 0$ 이므로 $1 \leq y \leq 3$ 이다.
따라서 $x^2 + y^2$ 는 $y = 1$ 일 때 최솟값이 1, $y = 3$ 일 때 최댓값이 9 이므로 구하는 값은 $1 + 9 = 10$ 이다.

34. 정수 계수를 갖는 임의의 삼차식 $f(x)$에 대하여 α는 $f(x)+1=0$의 한 정수근이고 β는 $f(x)-1=0$의 한 정수근일 때, $\beta-\alpha$의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$f(\alpha)+1=0,\ f(\beta)-1=0$이므로 $f(\beta)-f(\alpha)=2$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a,b,c,d$는 정수$)$로 놓으면

$f(\beta)-f(\alpha)=a(\beta^3-\alpha^3)+b(\beta^2-\alpha^2)+c(\beta-\alpha)=2$

$(\beta-\alpha)\left\{a(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)+b(\beta+\alpha)+c\right\}=2$

따라서 $\beta-\alpha$는 2의 약수이어야 한다.

$\therefore\ \beta-\alpha=\pm1$ 또는 ± 2

35. $\dfrac{x^2 - y^2 - 1}{x - y} = 6$을 만족시키는 자연수 x, y값의 순서쌍의 개수는?

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 2개

해설

$\dfrac{x^2 - y^2 - 1}{x - y} = 6$ 에서

$\dfrac{(x-y)(x+y)-1}{x-y} = (x+y) + \dfrac{-1}{x-y} = 6$

$x - y$ 는 -1 의 약수이다. 즉 -1 또는 1

i) $x - y = 1$ 일 때, $x + y = 7$

$\therefore\ x = 4,\ y = 3$

ii) $x - y = -1$ 일 때, $x + y = 5$

$\therefore\ x = 2,\ y = 3$

따라서 구하는 $(x,\ y) = (4,\ 3),\ (2,\ 3)$ 이므로

2 개이다.