1. $x-y=1$을 만족하는 모든 실수 x, y에 대하여 등식 $3x^2-5x+1=ay^2+by+c$이 항상 성립할 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x=y+1$을 주어진 식에 대입한 후,
y에 대한 내림차순으로 정리한다.
$3(y+1)^2-5(y+1)+1=ay^2+by+c$
$(3-a)y^2+(1-b)y-1-c=0$
$\therefore a=3,\ b=1,\ c=-1$
$\therefore\ a+b+c=3$

2. $f(x) = 2x^3 - 2x + k$ 가 $x-2$ 로 나누어 떨어질 때, k 의 값은?

① 0 ② 1 ③ −8 ④ −10 ⑤ −12

해설

$f(x) = 2x^3 - 2x + k$ 가 $x-2$ 로 나누어 떨어지면
나머지정리에 의해 $f(2) = 16 - 4 + k = 0$
$\therefore\ k = -12$

3. 다음 식을 간단히 하면?

$$ {}^{3}\sqrt{-8}+\sqrt{(-2)^2}+\sqrt{-8}\sqrt{-2} $$
$$ +\frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-4}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}+\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{2}} $$

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

(주어진 식)

$= {}^{3}\sqrt{(-2)^3}+\sqrt{4}+\sqrt{8}i\cdot\sqrt{2}i$

$\quad +\frac{\sqrt{16}i}{\sqrt{4}i}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}i}+\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}$

$= -2+2+\sqrt{8\cdot 2}i^2+\sqrt{\frac{16}{4}}-\frac{\sqrt{6}}{2}i+\frac{\sqrt{6}}{2}i$

$= -2+2-4+2$

$= -2$

※ 참고

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$가 항상 성립하는 a, b의 부호를 생각해 보자.

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 이므로

$\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{(-2)(-3)}=\sqrt{6}$이 된다고 계산할 수도 있다.

그러나 조심해야 할 것은 공식에서 주어지는 조건들이다.

즉, $a<0$, $b<0$일 때를 제외한 경우에만 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$가 성립한다.

마찬가지로 $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-5}}=\sqrt{-\frac{10}{5}}=\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$라고 함부로 계산해서는 안 된다.

왜냐하면 $a>0$, $b<0$일 때를 제외한 경우에만 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$가 성립하기 때문이다.

4. 이차방정식 $2x^2-2x+3=0$의 두 근을 구하면?

① $-1\pm\sqrt{5}i$ ② $1\pm\sqrt{5}$ ③ $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}i}{2}$
④ $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\dfrac{1\pm\sqrt{5}i}{2}$

해설
$2x^2-2x+3=0$에서
$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1^2-2\times3}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}i}{2}$

5. 이차방정식 $x^2-x(kx-5)+3=0$이 허근을 가질 때, 정수 k의 최댓값을 구하면?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$x^2-kx^2+5x+3=0$이 허근은 가지려면

$D=25-4\times 3(1-k)<0$

$25-12+12k<0 \quad \therefore 12k<-13$

$\therefore k<-\dfrac{13}{12}$이므로

정수 k의 최댓값은 -2

6. 이차함수 $y=x^2-2(k-3)x+4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $k<1$ ② $1<k<3$

③ $k<3$ ④ $3<k<5$

⑤ $k<1$ 또는 $k>5$

해설

이차함수 $y=x^2-2(k-3)x+4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2-2(k-3)x+4=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(k-3)^2-4>0$

$k^2-6k+5>0$, $(k-1)(k-5)>0$

$\therefore k<1$ 또는 $k>5$

7. 이자함수 $y = -2(x-1)^2 + 4$ 의 최댓값은?

① -4 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 4

해설

위로 볼록하고 꼭짓점이 $(1, 4)$

$\therefore x = 1$ 일 때, 최댓값 4 를 갖는다.

8. 다항식 x^3-2를 x^2-2로 나눈 나머지는?

① 2　② -2　③ $-2x-2$
④ $2x+2$　⑤ $2x-2$

해설

$\dfrac{x^3-2}{x^2-2}=\dfrac{x^3-2x+2x-2}{x^2-2}=x+\dfrac{2x-2}{x^2-2}$

$\therefore$ 몫은 x, 나머지는 $2x-2$

9. 등식 $x^2 - 2x + 3 = a + b(x-1) + c(x-1)^2$이 x에 관한 항등식일 때, $a^2 + b^2 + c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$x^2 - 2x + 3 = a + b(x-1) + c(x-1)^2$
$x = 1$을 대입하면 $2 = a$ ⋯⋯①
$x = 0$을 대입하면 $3 = a - b + c$ ⋯⋯②
$x = 2$를 대입하면 $3 = a + b + c$ ⋯⋯③
①을 ②, ③에 대입하여 정리하면
$b - c = -1$, $b + c = 1$
두 식을 연립하면 $b = 0$, $c = 1$
$\therefore$ $a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 0 + 1 = 5$

10. 다항식 $6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$을 $3x - 2$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $Q(1) + R$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$6x^3 - 7x^2 + 17x - 3 = (3x - 2)Q(x) + R$
양변에 $x = 1$을 대입하면, $13 = Q(1) + R$
$\therefore\ Q(1) + R = 13$

해설

$6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$를 $3x - 2$로 직접 나누거나 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

11. $x^3 + ax^2 + bx - 4$는 $x - 2$로 나누어 떨어지고 $x + 1$로 나누면 나머지가 6이다. $a - b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$라 하면

$f(2) = 4a + 2b + 4 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

$f(-1) = a - b - 5 = 6 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a = 3$, $b = -8$

$\therefore\ a - b = 11$

12. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx - 1$이 $x^2 - 3x + 2$로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ 로 놓으면
$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$, $x-2$ 로 나누어 떨어진다.
$f(1) = 1 + a + b - 1 = 0$ 즉, $a + b = 0 \cdots$ ㉠
$f(2) = 8 + 4a + 2b - 1 = 0$ 즉, $4a + 2b = -7 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡으로부터 $a = -\frac{7}{2}$, $b = \frac{7}{2}$
$\therefore a + b = 0$

13. $x^4+4x^3-2x^2+ax+b$가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b의 값은?

① $a=12,\ b=9$
② $a=-12,\ b=9$
③ $a=12,\ b=-9$
④ $a=-12,\ b=-9$
⑤ $a=9,\ b=12$

해설

$x^4+4x^3-2x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$으로 놓으면
이 식의 우변은
$x^4+2x^2(px+q)+(px+q)^2$
$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$
좌변과 계수를 비교하면
$2p=4,\ p^2+2q=-2$
$p=2,\ q=-3$에서
$a=2pq=-12,\ b=q^2=9$

14. 등식 $\frac{a}{1+i}+\frac{b}{1-i}=-5$를 만족하는 두 실수 $a+b$의 값을 구하시오 (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답:

▷ 정답: -10

해설

주어진 식의 양변에 $(1+i)(1-i)$를 곱하면
$a(1-i)+b(1+i)=-10$, $(a+b)+(b-a)i=-10$
$\therefore a+b=-10,\ b-a=0$

15. 복소수 z의 켤레복소수 $\bar{z}$라 할 때 $(1+2i)z+3(2-\bar{z})=0$을 만족하는 복소수 z를 구하면?

① $z=2-3i$ ② $z=4-3i$ ③ $z=6-3i$
④ $z=2+3i$ ⑤ $z=4+3i$

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$라 하면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (1+2i)(a+bi)+3(2-a+bi) \\ &= (6-2a-2b)+(2a+4b)i\end{aligned}$$

$\therefore 6-2a-2b=0, 2a+4b=0$

$\therefore a=6, b=-3$

$\therefore z=6-3i$

16. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \boxed{㉠}\ \frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\ &= \boxed{㉡}\ \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\ &= \boxed{㉢}\ \frac{\sqrt{-16}}{2} \\ &= \boxed{㉣}\ \frac{4i}{2} \\ &= \boxed{㉤} = \sqrt{-4}\end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\sqrt{2}i = 2i^2 = -2$

따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.

17. 이차방정식 $x^2+2x+k-3=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 정수 k의 최대값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

서로 다른 두 실근을 갖으려면 판별식이 0보다 커야 한다.

$D' = 1^2 - (k-3) > 0$

$\therefore\ k < 4$

$\therefore$ 최댓값은 3 ($\because\ k$는 정수)

18. 다음 이차함수 중 최댓값을 갖는 것은?

① $y=x^2+x-1$　② $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+1$

③ $y=\frac{1}{5}x^2+4$　④ $y=-x^2-2x+1$

⑤ $y=\frac{3}{4}(x+1)^2$

해설

이차항의 계수가 음수인 것을 찾는다.

19. $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면
$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x-1)^2 + 1$
따라서 함수 $f(x)$ 는 점$(1, 1)$ 을 꼭지점으로 하는
아래로 볼록한 포물선이다.
그러므로 $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서
최솟값은 $x = 1$ 일 때 1 이고,
최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

20.

세 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=\sqrt{6}$, $ab+bc+ca=2$일 때, $81(abc)^2$의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

21. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$ 의 전개식으로 옳은 것은?

① a^3+b^3 ② a^6+b^6 ③ a^6-b^6
④ a^9+b^9 ⑤ a^9-b^9

해설

(준 식)$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6$

22. $a = 2004$, $b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

해설

준 식은 $(a-b)^3$ 이다.

$a - b = 2004 - 2001 = 3$

$\therefore\ (a-b)^3 = 3^3 = 27$

23. 삼각형 ABC의 세변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$인 관계가 성립할 때 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① $b = c$인 이등변 삼각형

② $a = c$인 이등변삼각형

③ b가 빗변의 길이인 직각삼각형

④ 정삼각형

⑤ c가 빗변의 길이인 직각삼각형

해설

(준식) $= a^2(a+b) + b^2(a+b) - c^2(a+b)$

$= (a+b)\left(a^2 + b^2 - c^2\right) = 0$

$a^2 + b^2 = c^2$ ($\because$ $a + b \neq 0$)

$\therefore$ c가 빗변의 길이인 직각삼각형

24. 두 다항식 x^3+2x^2-x-2,
$(x-1)(3x^2+ax+2a)$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-3$

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+2)(x+1)$
$\therefore 3x^2+ax+2a$는
$x+2$ 또는 $x+1$을 인수로 가져야 한다.
$f(x)=3x^2+ax+2a$로 놓을 때
$x+2$가 인수이면 $f(-2)=12-2a+2a=12$가 되어 적합하지 않다.
$\therefore x+1$를 인수로 갖는다.
$x+1$이 인수이면 $f(-1)=3-a+2a=3+a=0$
$\therefore a=-3$

25. 세 다항식 $f(x) = x^2 + x - 2$, $g(x) = 2x^2 + 3x - 2$, $h(x) = x^2 + mx + 8$의 최대공약수가 x의 일차식일 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $m = 6$

해설

$f(x) = (x+2)(x-1)$
$g(x) = (x+2)(2x-1)$ 이므로
$f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수는 $x+2$
이것이 $h(x)$의 약수이어야 하므로
$h(-2) = 4 - 2m + 8 = 0$
$\therefore\ m = 6$

26. 두 다항식 A, B에 대하여 $A = x^2 + ax + 2,\ B = x^2 + bx + c$이고 A, B의 최대공약수가 $x + 1$, 최소공배수가 $x^3 + 2x^2 - x - 2$일 때, $a + b + c$의 값은 ?

① -1　　② 0　　③ 2　　④ -2　　⑤ 3

해설

$A = m(x+1),\ B = n(x+1)$이라 놓으면

$mn(x+1) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$\therefore\ mn = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

$\therefore\ m = x+2,\ n = x-1$ 또는 $m = x-1,\ n = x+2$

$A = (x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$

$B = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$

여기서, $a = 3,\ b = 0,\ c = -1$

$\therefore\ a + b + c = 2$

27. 이차함수 $y = x^2 + 2bx + c$ 가 $x = 1$ 에서 최솟값 3 을 가질 때, $b + c$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x = 1$ 일 때, 최솟값 3 을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 (1, 3) 이다.

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2bx + c \\ &= (x-1)^2 + 3 \\ &= x^2 - 2x + 4 \quad \therefore b = -1, c = 4 \end{aligned}$$

$\therefore b + c = 3$

28. x에 대한 항등식 $(x^2 - x - 1)^3 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_6 x^6$ 에서 $a_1 + a_3 + a_5$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면,
$-1 = a_0 + a_1 + \ \cdots \ + a_6 \ \cdots$ ㉠
양변에 $x = -1$을 대입하면,
$1 = a_0 - a_1 + \ \cdots \ + a_6 \ \cdots$ ㉡
㉠ − ㉡: $-2 = 2(a_1 + a_3 + a_5)$
$\therefore \ a_1 + a_3 + a_5 = -1$

29. 두 다항식 $A,\ B$에 대하여 $\{A,\ B\} = A^2 + B^2 - AB$라 할 때, $\{x^2 + 1,\ 2x^2 - 3\} - 7$을 실수 범위에서 인수분해한다. 이 때, 인수가 아닌 것은?

① $x - \sqrt{2}$　② $x - 1$　③ x
④ $x + 1$　⑤ $x + \sqrt{2}$

해설

$\{x^2 + 1,\ 2x^2 - 3\} - 7$
$= (x^2 + 1)^2 + (2x^2 - 3)^2 - (x^2 + 1)(2x^2 - 3) - 7$
$= x^4 + 2x^2 + 1 + 4x^4 - 12x^2 + 9 - 2x^4 + x^2 + 3 - 7$
$= 3x^4 - 9x^2 + 6$
$= 3(x^4 - 3x^2 + 2)$
$= 3(x^2 - 1)(x^2 - 2)$
$= 3(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

30. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 의 합이 $2x^2+2x$ 이고, 최소공배수가 x^3+x^2-9x-9 일 때, $f(1)g(1)$ 의 값은?

① -32　② -24　③ -16　④ -12　⑤ -8

해설

$f(x), g(x)$ 의 최대공약수를 G 라 하면
$f(x) = Ga, g(x) = Gb$ (a, b 는 서로소)
$f(x)+g(x) = G(a+b) = 2x^2+2x = 2x(x+1)$
최소공배수 $Gab = x^3+x^2-9x-9$
$= (x+1)(x+3)(x-3)$
이상에서 $G = x+1$ 이고 $ab = (x-3)(x+3)$
따라서 $f(x)g(x) = G^2ab = (x+1)^2(x+3)(x-3)$
$\therefore\ f(1)g(1) = -32$

31. x, y 가 실수일 때, 복소수 $z = x + yi$ 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 하면 $z\bar{z} = 3$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{3}{z}\right)$ 의 값은 ?

① x　　② y　　③ $x + y$
④ $x - y$　　⑤ $2x + y$

해설

$z = x + yi$, $\bar{z} = x - yi$ 이므로

$z \cdot \bar{z} = 3$ 이면 $\bar{z} = \frac{3}{z}$ 을 대입

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(z + \frac{3}{z}\right) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ &= \frac{1}{2}(x + yi + x - yi) \\ &= x\end{aligned}$$

32. $x^2+5xy+ay^2+y-2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{8}{49}$ ② $\frac{49}{8}$ ③ 49 ④ 8 ⑤ 0

해설

$x^2+5xy+ay^2+y-2$를 x에 대해 정리하면
$x^2+5yx+ay^2+y-2$
이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.
$D=(25-4a)y^2-4y+8$
$\frac{D'}{4}=4-8(25-4a)=0,$
$4-200+32a=0$
$\therefore\ a=\frac{49}{8}$

33. x에 대한 이차방정식 $x^2-(a-2)x+a^2+a+2=0$의 두 실근을 α, β라 한다. 이 때, $(\alpha+1)(\beta+1)$의 최댓값을 구하면?

① 3　　② 2　　③ 1　　④ 0　　⑤ −1

해설

$\alpha,\ \beta$ 는 실수이므로

$D=(a-2)^2-4(a^2+a+2)\geq 0$

$\therefore\ -2\leq a\leq -\frac{2}{3}$

$\alpha+\beta=a-2,\ \alpha\beta=a^2+a+2$

$$\begin{aligned}(\alpha+1)(\beta+1)&=\alpha\beta+\alpha+\beta+1\\&=a^2+a+2+a-2+1\\&=(a+1)^2\end{aligned}$$

$\therefore\ a=-2$일 때 최댓값 $(-2+1)^2=1$