1. x 에 대한 다항식 $A = 2x^3 + 5x^2 + 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x+1$ 이고, 나머지가 $-6x+2$ 이다. 이 때, 다항식 B 를 구하면?

① $x^2 + 2x + 2$　② $x^2 + x + 2$　③ $x^2 - x + 2$
④ $x^2 - 2x + 2$　⑤ $x^2 - 3x + 2$

해설

$A = B(2x+1) - 6x + 2$ 에서
$B(2x+1) = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2$
$\therefore B = (2x^3 + 5x^2 + 6x + 2) \div (2x+1)$
$= x^2 + 2x + 2$

2. 다음 식 중에서 옳지 않은 것을 고르면?

① $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

② $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

③ $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

④ $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑤ $(a^2+a+1)(a^2-a+1) = a^4-a^2+1$

해설

⑤ $(a^2+a+1)(a^2-a+1) = (a^2+1)^2-a^2$
$= a^4+a^2+1$

3. $x+y+z=4,\ xy+yz+zx=1,\ xyz=2$일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$의 값을 구하면?

① 16　　② 8　　③ 4　　④ 2　　⑤ 1

해설

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$을

$xy+yz+zx=1$을 이용하여 변형하면

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$

$=(1-zx)(1-xy)(1-yz)$

$=1-(xy+yz+zx)+(x^2yz+xy^2z+xyz^2)-(xyz)^2$

$=1-(xy+yz+zx)+xyz(x+y+z)-(xyz)^2$

$=1-1+2\cdot4-4$

$=4$

※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.

$(x-a)(x-b)(x-c)$

$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

4. 임의의 x 에 대하여 $x^3-1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 를 만족하는 상수 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 합 $a+b+c+d$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

양변에 $x=0$ 을 대입 하면

$-1=a+b+c+d$

$\therefore\ a+b+c+d=-1$

해설

$x^3-1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

$=(x+1)\{a(x+1)^2+b(x+1)+c\}+d$

$=(x+1)[(x+1)\{a(x+1)+b\}+c]+d$ 이므로

x^3-1 을 $x+1$ 로 연속으로 나눌 때

차례대로 나오는 나머지가 $d,\ c,\ b$ 가 되고 마지막 몫이 a 이다.

-1	1	0	0	-1		
		-1	1	-1		
-1	1	-1	1	$\boxed{-2}$	$\leftarrow$	d
		-1	2			
-1	1	-2	$\boxed{3}$	$\leftarrow$	c	
		-1				
	1	$\boxed{-3}$	$\leftarrow$ b			
	$\uparrow$					
	a					

5. n이 자연수일 때, x의 정식 $x^n(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $3^n(x-3)$이 될 때, $a+b$의 값은?

① -1　　② 1　　③ -2　　④ 2　　⑤ 3

해설

$x^n(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)\cdots$①

$x=3$을 대입하면 $3^n(9+3a+b)=0$

$\therefore\ b=-3a-9\cdots$②

②를 ①에 대입하면

$x^n(x^2+ax-3a-9)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$

$\therefore\ (x-3)\{x^n(x+a+3)\}=(x-3)\{(x-3)Q(x)+3^n\}$

양변을 $x-3$으로 나눈 몫을 비교하면

$x^n(x+a+3)=(x-3)Q(x)+3^n$

$x=3$을 대입하면 $3^n(6+a)=3^n\ \therefore\ 6+a=1\ \therefore\ a=-5$

②에서 $b=6$

$\therefore\ a=-5,\ b=6\ \therefore\ a+b=1$

6. x에 대한 항등식 $(1+2x-x^2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$ 에서 $3a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10}$ 의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

ⅰ) 항등식의 상수항 : $a_0 = 1$

ⅱ) 항등식에 $x = 1, x = -1$ 을 대입하여 식을 만든다.

$x = 1$ 을 대입하면 $2^5 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{10} \cdots$ ①

$x = -1$ 을 대입하면 $(-2)^5 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \cdots + a_{10} \cdots$ ②

① + ②: $0 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10})$

$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10} = 0$

$3a_0 + a_2 + a_4 + \cdots a_{10} = 2 (\because a_0 = 1)$

7. $f(x) = x^2 - ax + 1$이 $x - 1$로 나누어 떨어질 때 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

해설

$f(1) = 1^2 - a \cdot 1 + 1 = 0$

$\therefore\ a = 2$

8. 다항식 $f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지는 각각 1, 2이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$일 때, $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는?

① $Q(3)+3$　　② $Q(3)+4$　　③ $2Q(3)+3$

④ $2Q(3)+4$　　⑤ $Q(3)$

해설

주어진 조건에서 $f(1)=1$, $f(2)=2$이다.

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$라 놓으면

$f(1)=a+b=1$, $f(2)=2a+b=2$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

즉 $f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+x$

$\therefore\ f(3)=2Q(3)+3$

9. 다항식 $f(x)$를 $ax+b(a \neq 0)$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 한다. $xf(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나눈 나머지를 구하면 ?

① $\frac{bR}{a}$ ② $\frac{b}{Ra}$ ③ $-\frac{b}{a}R$ ④ $\frac{aR}{b}$ ⑤ $-\frac{aR}{b}$

해설

$f(x)=(ax+b)Q(x)+R$

$=a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$

$\therefore\ x\cdot f(x)$

$=ax\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+Rx$

$=ax\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R\left(x+\frac{b}{a}\right)-\frac{b}{a}R$

$=\left(x+\frac{b}{a}\right)\{axQ(x)+R\}-\frac{b}{a}R$

따라서, 구하는 몫은 $axQ(x)+R$

나머지는 $-\frac{bR}{a}$

해설

$f(x)=(ax+b)Q(x)+R$에서

나머지 정리에 의해 $f(-\frac{b}{a})=R$

$x\cdot f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q'(x)+R'$이라 하면

나머지 정리에 의해 $-\frac{b}{a}f(-\frac{b}{a})=R'$

$f(-\frac{b}{a})=R$를 대입하면 $R'=-\frac{b}{a}R$

10. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$, x^2-4x+5, $(x-1)(x^2-4x+5)$ 로 나누면 나머지가 각각 4, $px+q$, $(x-r)^2$ 이 될 때, pqr 의 값은? (단, $r>0$)

① -24　② -36　③ 20　④ 18　⑤ 14

해설

$f(x)=(x^2-4x+5)Q(x)+px+q\cdots$①
$=(x-1)(x^2-4x+5)Q'(x)+(x-r)^2\cdots$②
$=(x-1)(x^2-4x+5)Q'(x)+(x^2-4x+5)+px+q\cdots$③
$f(1)=4$ 이므로 ②에서 $f(1)=(1-r)^2=4$
$r>0$ 이므로 $r=3$
②, ③을 비교해 보면
$(x-r)^2=(x^2-4x+5)+px+q$
$r=3$ 을 대입하면
$(x-3)^2=x^2+(p-4)x+(q+5)$
$\therefore\ p-4=-6,\ q+5=9$
$\therefore\ p=-2,\ q=4$
$\therefore\ pqr=-24$

11. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx - 1$ 이 $x^2 - 3x + 2$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ 로 놓으면
$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$, $x-2$ 로 나누어 떨어진다.
$f(1) = 1 + a + b - 1 = 0$ 즉, $a + b = 0 \cdots$ ㉠
$f(2) = 8 + 4a + 2b - 1 = 0$ 즉, $4a + 2b = -7 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡으로부터 $a = -\frac{7}{2}$, $b = \frac{7}{2}$
$\therefore a + b = 0$

12. x 에 대한 다항식 $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ 에 대하여 $f(x)+2,\ xf(x)+2$ 가 모두 일차식 $x-\alpha$ 로 나누어 떨어질 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha)+2=0, \alpha f(\alpha)+2=0$

$f(\alpha)=-2, \alpha=1$

$\therefore f(1)=-2$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f(1)=1+a+b+c=-2$

$\therefore a+b+c=-3$

13. $\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$ 은 자연수이다. 이 때, 각 자리의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x = 21$ 이라 하면

$\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$

$= \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$

$= \sqrt{\{x(x+3)\}(x+1)(x+2)+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1}$

$= \sqrt{\{(x^2+3x)+1\}^2}$

$= x^2+3x+1 \ (\because (x^2+3x)+1>0)$

$= 21^2+3 \cdot 21+1 = 505$

각자리 숫자의 합은 $5+0+5=10$

14. $x^4 + 4x^3 - 2x^2 + ax + b$가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b의 값은?

① $a = 12,\ b = 9$

② $a = -12,\ b = 9$

③ $a = 12,\ b = -9$

④ $a = -12,\ b = -9$

⑤ $a = 9,\ b = 12$

해설

$x^4 + 4x^3 - 2x^2 + ax + b = (x^2 + px + q)^2$ 으로 놓으면

이 식의 우변은

$x^4 + 2x^2(px + q) + (px + q)^2$

$= x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2$

좌변과 계수를 비교하면

$2p = 4,\ p^2 + 2q = -2$

$p = 2,\ q = -3$에서

$a = 2pq = -12,\ b = q^2 = 9$

15. $\dfrac{899^3+1}{899\times 898+1}$ 의 양의 약수의 개수는?

① 27 개 ② 25 개 ③ 21 개 ④ 18 개 ⑤ 15 개

해설

$a=899$ 라 치환하면

$$(\text{준 식})=\frac{a^3+1}{a(a-1)+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$
$$=a+1=900$$

$900=2^2\times 3^2\times 5^2$

$\therefore$ 900 의 약수의 개수 $=(2+1)\times(2+1)\times(2+1)$
$=27$

16. 세 실수 x, y, z에 대하여 $[x, y, z] = xy^2 - y^2z$라 하자. $x - y = 2$, $xy - yz - zx = 1$이라 할 때, $[y, x, z] + [z, y, x]$의 값은?

① 0　　② −2　　③ 2　　④ −4　　⑤ 4

해설

$$[y, x, z] = yx^2 - x^2z,\ [z, y, x] = zy^2 - y^2x$$

$$\begin{aligned}[y, x, z] + [z, y, x] &= yx^2 - x^2z + zy^2 - y^2x \\ &= xy(x - y) - z(x^2 - y^2) \\ &= (x - y)(xy - yz - zx) \\ &= 2 \cdot 1 = 2\end{aligned}$$

17. 세 다항식 $f(x)=x^2+x-2$, $g(x)=2x^2+3x-2$, $h(x)=x^2+mx+8$ 의 최대공약수가 x의 일차식일 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m=6$

해설

$f(x)=(x+2)(x-1)$

$g(x)=(x+2)(2x-1)$ 이므로

$f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수는 $x+2$

이것이 $h(x)$의 약수이어야 하므로

$h(-2)=4-2m+8=0$

$\therefore\ m=6$

18. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2-8$이고, 최소공배수가 x^3-2x^2-5x+6이다. 두 다항식의 상수항을 a, b라 할 때, ab의 값은?

① -8　② -3　③ 0　④ 6　⑤ 12

해설

두 다항식의 합에도 최대공약수가 들어 있으므로
$2x^2-8=2(x-2)(x+2)$
$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x-3)(x+2)$
따라서 두 다항식의 최소공배수는 $x+2$이고 두 다항식의 차수가 같으므로 두 다항식은 이차식이다.
$(x+2)(x-1)=x^2+x-2$
$(x+2)(x-3)=x^2-x-6$
$\therefore\ ab=(-2)\times(-6)=12$

19. x^2+ax+b, x^2+bx+a 의 최대공약수가 x 의 일차식일 때, 최소공배수는?

① $(x-2)(x-a)(x-b)$ ② $(x+2)(x-a)(x-b)$
③ $(x+1)(x+a)(x+b)$ ④ $(x+1)(x-a)(x-b)$
⑤ $(x-1)(x-a)(x-b)$

해설

$$\begin{cases} x^2+ax+b \cdots ㉠ \\ x^2+bx+a \cdots ㉡ \end{cases}$$
㉠ − ㉡ : $(a-b)(x-1)$
㉠, ㉡ 에서 $a \neq b$ 이므로 최대공약수는 $x-1$ 이다.
$1+a+b=0$, $a=-1-b$, $b=-1-a$
이 때, ㉠은 $x^2-(1+b)x+b=(x-1)(x-b)$
㉡은 $x^2-(1+a)x+a=(x-1)(x-a)$
여기서, $a \neq b$ 이므로 $x-a$ 와 $x-b$ 는 서로 소이다.
따라서, 구하는 최소공배수는 $(x-1)(x-a)(x-b)$

20. 최고차항의 계수가 1인 두 이차다항식 $A,\ B$에 대하여 $A,\ B$의 최대공약수를 $(A,\ B)$, $A,\ B$의 최소공배수를 $[A,\ B]$라 하자. 다항식 $A,\ B$가

$$(A+B,\ A-B)=2x-3,\ [A+B,\ A-B]=2x^2+x-6$$

을 만족할 때, $2[A,\ B]=0$과 같은 해를 갖는 것은?

① $2x^3+5x^2-6x-9$　② x^3+4x^2-2x-7
③ x^3-3x^2+5x-1　④ $3x^3-x^2+2x-1$
⑤ $-x^3+2x^2-5x+7$

해설

$A=aG,\ B=bG$ (a,b는 서로소)라 하자.
$(A+B, A-B)=((a+b)G,\ (a-b)G)=2x-3$ 이므로
G는 $2x-3$
따라서 A,B는 $2x-3$으로 나누어떨어지고 a, b는 일차식이다.
또 $[A+B, A-B]=[(a+b)G, (a-b)G]=2x^2+x-6$
$=(x+2)(2x-3)$ 이므로 $(a+b)(a-b)G=(x+2)(2x-3)$
$\therefore\ (a+b)(a-b)=x+2$ 이고
a, b는 모두 일차식이므로
$a+b=x+2,\ a-b=1$ 이라 하고 연립하여 풀면
$a=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$,
$b=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
$$\therefore\ [A, B]=\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)(2x-3)$$
$$=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right)(2x-3)$$
$$=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{8}{4}x^2-3x+\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}$$
$$=\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{4}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}$$
$$\therefore\ 2[A, B]=x^3+\frac{5}{2}x^2-3x-\frac{9}{2}$$
따라서 $2[A, B]$와 같은 것은 ① $2x^3+5x^2-6x-9$ 이다.