

1. $x^4 + 4x^3 - 2x^2 + ax + b$ 가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b 의 값은?

① $a = 12, b = 9$

② $a = -12, b = 9$

③ $a = 12, b = -9$

④ $a = -12, b = -9$

⑤ $a = 9, b = 12$

해설

$x^4 + 4x^3 - 2x^2 + ax + b = (x^2 + px + q)^2$ 으로 놓으면

이 식의 우변은

$$x^4 + 2x^2(px + q) + (px + q)^2$$

$$= x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2$$

좌변과 계수를 비교하면

$$2p = 4, p^2 + 2q = -2$$

$$p = 2, q = -3 \text{에서}$$

$$a = 2pq = -12, b = q^2 = 9$$

2. 두 다항식 $x^2 - 4x + 3a + b$ 와 $x^2 + bx - 6$ 의 최대공약수가 $x - 2$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 8

해설

$$f(x) = x^2 - 4x + 3a + b,$$

$$g(x) = x^2 + bx - 6 \text{ 이라 하면}$$

$f(x)$ 와 $g(x)$ 는 모두 $x - 2$ 로 나누어떨어지므로

$$f(2) = g(2) = 0 \text{ 에서}$$

$$f(2) = 4 - 8 + 3a + b = 0, g(2) = 4 + 2b - 6 = 0$$

$$\therefore a = 1, b = 1 \therefore a + b = 2$$

3. 이차함수 $y = -(x-1)(x+3)$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$$\begin{aligned}y &= -(x-1)(x+3) \\ &= -x^2 - 2x + 3 \\ &= -(x+1)^2 + 4 \\ x &= -1 \text{ 일 때, 최댓값 } 4 \text{ 를 가진다.}\end{aligned}$$

4. 두 다항식 A, B 에 대하여 $A + B = -x^3 - 2x^2 + 4x + 5$, $2A - B = 4x^3 - x^2 - x + 1$ 일 때, 두 다항식 A, B 를 구하면?

① $A = x^3 + x^2 + x + 2$, $B = -2x^3 - 3x^2 + 3x + 3$

② $A = x^3 - x^2 + x + 2$, $B = -2x^3 - x^2 + 3x + 3$

③ $A = x^3 - x^2 + x - 2$, $B = -2x^3 - x^2 + 3x + 7$

④ $A = x^3 - x^2 - x + 2$, $B = -2x^3 - x^2 + 5x + 3$

⑤ $A = 3x^3 - 3x^2 + 3x + 6$, $B = -4x^3 + x^2 + x - 1$

해설

$$A + B = -x^3 - 2x^2 + 4x + 5 \cdots \text{㉠}$$

$$2A - B = 4x^3 - x^2 - x + 1 \cdots \text{㉡}$$

$$(\text{㉠} + \text{㉡}) \div 3 : A = x^3 - x^2 + x + 2$$

$$(2\text{㉠} - \text{㉡}) \div 3 : B = -2x^3 - x^2 + 3x + 3$$

5. $a = 2004, b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

- ① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

해설

준 식은 $(a - b)^3$ 이다.
 $a - b = 2004 - 2001 = 3$
 $\therefore (a - b)^3 = 3^3 = 27$

6. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겹넓이는 52이고, 모서리의 길이의 합은 36이다. 이 상자의 대각선의 길이는?

① 5 ② $\sqrt{29}$ ③ $\sqrt{33}$ ④ 6 ⑤ $\sqrt{42}$

해설

$$\begin{aligned} & \text{세 모서리의 길이를 } a, b, c \text{ 라 하면} \\ & 2(ab + bc + ca) = 52 \\ & 4(a + b + c) = 36 \rightarrow a + b + c = 9 \\ & (\text{직육면체 대각선의 길이}) \\ & = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ & = \sqrt{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)} \\ & = \sqrt{81 - 52} = \sqrt{29} \end{aligned}$$

7. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ 에 대하여 $f(x-1) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ 일 때, 상수 $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

$$\begin{aligned} f(x-1) &= (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 2(x-1) + 5 \\ &= x^3 + Ax^2 + Bx + C \cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

㉠은 x 에 대한 항등식이므로 양변에 $x = 0, 1, 2$ 를 차례로 대입하면,

$$x = 0 \text{ 일 때, } -1 = C$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } 5 = 1 + A + B + C$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } 5 = 8 + 4A + 2B + C$$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$$A = -6, B = 11, C = -1$$

8. $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_{15}(x-1)^{15}$
일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{14}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \dots - a_{15} \dots \textcircled{1}$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{15} \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$2 = 2(a_0 + a_2 + \dots + a_{14}) \text{이다.}$$

$$\therefore a_0 + a_2 + \dots + a_{14} = 1$$

9. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 3이고, $x+1$ 로 나눈 나머지가 -1 일 때, $(x^2+x+2)f(x)$ 를 x^2-1 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(1)$ 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

나머지 정리에 의해 $f(1) = 3, f(-1) = -1$

$(x^2+x+2)f(x) = (x^2-1)Q(x) + ax + b$

$x = 1, x = -1$ 을 대입한다.

$4f(1) = 12 = a + b \cdots \textcircled{A}$

$2f(-1) = -2 = -a + b \cdots \textcircled{B}$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면,

$a = 7, b = 5$

\therefore 나머지 $R(x) = 7x + 5$

$R(1) = 12$

10. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$$\begin{aligned}x^2 + x &= A \text{로 치환하면} \\(x-3)(x-1)(x+2)(x+4) + 24 \\&= \{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\} + 24 \\&= (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 12) + 24 \\&= (A-2)(A-12) + 24 \\&= A^2 - 14A + 48 = (A-6)(A-8) \\&= (x^2 + x - 6)(x^2 + x - 8) \\&= (x-2)(x+3)(x^2 + x - 8) \\ \therefore a+b+c-d &= -2+3+1-(-8) = 10\end{aligned}$$

11. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 3px + 4q + 2 = 0$ 의 두 근의 비가 1:2가 되도록 하는 실수 p, q 에 대하여 다음 중 알맞은 q 의 값으로 가장 작은 것은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

두 근의 비가 1:2이므로 두 근을 $\alpha, 2\alpha$ 라 하면
근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + 2\alpha = 3p \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha \cdot 3\alpha = 4q + 2 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 $\alpha = p$ 이것을 ㉡에 대입하면

$$2p^2 = 4q + 2 \quad \therefore p^2 = 2q + 1 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

한편, p, q (실수)에서 주어진 방정식은

서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$$D = (-3p)^2 - 4(4q + 2) > 0$$

$$\therefore 9p^2 - 16q - 8 > 0$$

$$\text{위 식을 } \textcircled{㉢} \text{에 대입하면 } (18q + 9) - 16q - 8 > 0$$

$$2q + 1 > 0 \quad \therefore q > -\frac{1}{2}$$

12. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 b 를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}, 4$ 를 얻었고, c 를 잘못 보아 $-1, 4$ 의 두 근을 얻었다. 이 때, 옳은 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

(i) b 를 잘못 본 경우
 a 와 c 는 옳으므로 두 근의 곱은
 $\frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{c}{a} \quad \therefore c = 2a$

(ii) c 를 잘못 본 경우
 a 와 b 는 옳으므로 두 근의 합은
 $-1 + 4 = 3 = -\frac{b}{a} \quad \therefore b = -3a$

(i), (ii)에서 주어진 방정식은
 $ax^2 - 3ax + 2a = 0$
 $a \neq 0$ 이므로 $x^2 - 3x + 2 = 0$
 $(x-1)(x-2) = 0$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = 2$
따라서 근의 합은 3이다.

13. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $a < -1$ 또는 $a > 1$ ② $a < -2$ 또는 $a > 2$
③ $1 < a < -1$ ④ $-2 < a < 2$
⑤ $a = -1$ 또는 $a = 1$

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가
 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$ 에서
판별식의 값은 양이다.
즉 $D = a^2 - 4 > 0$
 $\therefore a < -2$ 또는 $a > 2$

14. 이차함수 $y = x^2 + ax + 3$ 의 그래프와 직선 $y = x + 3a$ 가 만나지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $-12 < a < 1$ ② $-12 < a < 2$ ③ $-11 < a < 1$
④ $-11 < a < 2$ ⑤ $-10 < a < 2$

해설

이차함수 $y = x^2 + ax + 3$ 의 그래프와
직선 $y = x + 3a$ 는 서로 만나지 않으므로
이차방정식 $x^2 + ax + 3 = x + 3a$,
즉 $x^2 + (a-1)x + 3 - 3a = 0$ 에서
 $D = (a-1)^2 - 4(3-3a) < 0$
 $a^2 + 10a - 11 < 0$, $(a+11)(a-1) < 0$
 $\therefore -11 < a < 1$

15. 이차함수 $y = -x^2 + 2kx + 4k$ 의 최댓값이 5 일 때, 상수 k 의 값을 구하면? (단, $k > 0$)

- ① 7 ② 5 ③ 1 ④ 9 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 2kx + 4k \\ &= -(x^2 - 2kx + k^2 - k^2) + 4k \\ &= -(x - k)^2 + (k^2 + 4k) \end{aligned}$$

최댓값 $k^2 + 4k = 5$, $k^2 + 4k - 5 = 0$
 $k = 1$ 또는 $k = -5$ 에서 $k > 0$ 이므로 $k = 1$

16. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

- ① 1 ② $1-i$ ③ $1+i$ ④ -1 ⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = i \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = 1$$

17. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{14}$ 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ 에서 } 2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0, \alpha^3 = 1$$

$$\therefore \alpha^{3k+1} = \alpha, \alpha^{3k+2} = \alpha^2, \alpha^{3k} = 1$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= (\alpha + \alpha^2 + 1) + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \\ &\quad \dots + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \alpha + \alpha^2 \\ &= \alpha + \alpha^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$(\because \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$$