1. $x^4+4x^3-2x^2+ax+b$가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b의 값은?

① $a=12,\ b=9$

② $a=-12,\ b=9$

③ $a=12,\ b=-9$

④ $a=-12,\ b=-9$

⑤ $a=9,\ b=12$

해설

$x^4+4x^3-2x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$으로 놓으면

이 식의 우변은

$x^4+2x^2(px+q)+(px+q)^2$

$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$

좌변과 계수를 비교하면

$2p=4,\ p^2+2q=-2$

$p=2,\ q=-3$에서

$a=2pq=-12,\ b=q^2=9$

2. 두 다항식 $x^2-4x+3a+b$와 x^2+bx-6의 최대공약수가 $x-2$일 때, $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 8

해설

$f(x)=x^2-4x+3a+b,$

$g(x)=x^2+bx-6$이라 하면

$f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x-2$로 나누어떨어지므로

$f(2)=g(2)=0$에서

$f(2)=4-8+3a+b=0,\ g(2)=4+2b-6=0$

$\therefore\ a=1,\ b=1 \therefore\ a+b=2$

3. 이차함수 $y = -(x-1)(x+3)$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

$$
\begin{aligned}
y &= -(x-1)(x+3) \\
&= -x^2 - 2x + 3 \\
&= -(x+1)^2 + 4
\end{aligned}
$$

$x = -1$ 일 때, 최댓값 4 를 가진다.

4. 두 다항식 $A,\ B$ 에 대하여 $A+B=-x^3-2x^2+4x+5$, $2A-B=4x^3-x^2-x+1$ 일 때, 두 다항식 A, B 를 구하면?

① $A=x^3+x^2+x+2,\ B=-2x^3-3x^2+3x+3$

② $A=x^3-x^2+x+2,\ B=-2x^3-x^2+3x+3$

③ $A=x^3-x^2+x-2,\ B=-2x^3-x^2+3x+7$

④ $A=x^3-x^2-x+2,\ B=-2x^3-x^2+5x+3$

⑤ $A=3x^3-3x^2+3x+6,\ B=-4x^3+x^2+x-1$

해설

$A+B=-x^3-2x^2+4x+5\cdots$ ㉠
$2A-B=4x^3-x^2-x+1\cdots$ ㉡
(㉠ + ㉡) $\div 3$: $A=x^3-x^2+x+2$
(2㉠ − ㉡) $\div 3$: $B=-2x^3-x^2+3x+3$

5. $a = 2004$, $b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

해설

준 식은 $(a-b)^3$ 이다.

$a - b = 2004 - 2001 = 3$

$\therefore \ (a-b)^3 = 3^3 = 27$

6. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겉넓이는 52이고, 모서리의 길이의 합은 36이다. 이 상자의 대각선의 길이는?

① 5 ② $\sqrt{29}$ ③ $\sqrt{33}$ ④ 6 ⑤ $\sqrt{42}$

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c라 하면

$2(ab+bc+ca)=52$

$4(a+b+c)=36 \;\rightarrow\; a+b+c=9$

(직육면체 대각선의 길이)

$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=\sqrt{(a+b+c+)^2-2(ab+bc+ca)}$

$=\sqrt{81-52}=\sqrt{29}$

7. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$에 대하여 $f(x-1) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$일 때, 상수$A \times B \times C$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

$$f(x-1) = (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 2(x-1) + 5$$
$$= x^3 + Ax^2 + Bx + C \cdots ㉠$$

㉠은 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x = 0,\ 1,\ 2$를 차례로 대입하면,

$x = 0$일 때, $-1 = C$

$x = 1$일 때, $5 = 1 + A + B + C$

$x = 2$일 때, $5 = 8 + 4A + 2B + C$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$A = -6,\ B = 11,\ C = -1$

8. $(x^3-x^2-2x+1)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{15}(x-1)^{15}$ 일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{14}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x=0$을 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{15} \cdots$ ㉠

양변에 $x=2$를 대입하면

$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} \quad \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면

$2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{14})$이다.

$\therefore\ a_0 + a_2 + \cdots a_{14} = 1$

9. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 3이고, $x+1$로 나눈 나머지가 -1일 때, $(x^2+x+2)f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

나머지 정리에 의해 $f(1)=3, f(-1)=-1$

$(x^2+x+2)f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$x=1, x=-1$ 을 대입한다.

$4f(1)=12=a+b\cdots$ ㉠

$2f(-1)=-2=-a+b\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면,

$a=7,\ b=5$

$\therefore$ 나머지 $R(x)=7x+5$

$R(1)=12$

10. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+x=A$ 로 치환하면

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$=(A-2)(A-12)+24$

$=A^2-14A+48=(A-6)(A-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

$\therefore\ a+b+c-d=-2+3+1-(-8)=10$

11. x에 대한 이차방정식 $x^2 - 3px + 4q + 2 = 0$의 두 근의 비가 1:2가 되도록 하는 실수 p, q에 대하여 다음 중 알맞은 q의 값으로 가장 작은 것은?

① -1　　② $-\frac{1}{2}$　　③ $\frac{1}{2}$　　④ 1　　⑤ 2

해설

두 근의 비가 $1:2$이므로 두 근을 α, 2α라 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + 2\alpha = 3p \cdots\cdots$ ㉠
$\alpha \cdot 3\alpha = 4q + 2 \cdots\cdots$ ㉡
㉠에서 $\alpha = p$ 이것을 ㉡에 대입하면
$2p^2 = 4q + 2 \quad \therefore p^2 = 2q + 1 \cdots\cdots$ ㉢
한편, p, q(실수)에서 주어진 방정식은
서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
$D = (-3p)^2 - 4(4q + 2) > 0$
$\therefore\ 9p^2 - 16q - 8 > 0$
위 식을 ㉢에 대입하면 $(18q + 9) - 16p - 8 > 0$
$2q + 1 > 0 \quad \therefore q > -\frac{1}{2}$

12. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 b를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}$, 4를 얻었고, c를 잘못 보아 -1, 4의 두 근을 얻었다. 이 때, 옳은 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

(i) b를 잘못 본 경우
a와 c는 옳으므로 두 근의 곱은
$\frac{1}{2}\cdot 4=\frac{c}{a}\quad \therefore\ c=2a$
(ii) c를 잘못 본 경우
a와 b는 옳으므로 두 근의 합은
$-1+4=3=-\frac{b}{a}\quad \therefore\ b=-3a$
(i), (ii)에서 주어진 방정식은
$ax^2-3ax+2a=0$
$a\neq 0$이므로 $x^2-3x+2=0$
$(x-1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$
따라서 근의 합은 3이다.

13. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$ 또는 $a > 1$

② $a < -2$ 또는 $a > 2$

③ $1 < a < -1$

④ $-2 < a < 2$

⑤ $a = -1$ 또는 $a = 1$

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가
x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$ 에서
판별식의 값은 양이다.
즉 $D = a^2 - 4 > 0$
$\therefore\ a < -2$ 또는 $a > 2$

14. 이차함수 $y = x^2 + ax + 3$의 그래프와 직선 $y = x + 3a$가 만나지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $-12 < a < 1$　② $-12 < a < 2$　③ $-11 < a < 1$

④ $-11 < a < 2$　⑤ $-10 < a < 2$

해설

이차함수 $y = x^2 + ax + 3$의 그래프와
직선 $y = x + 3a$는 서로 만나지 않으므로
이차방정식 $x^2 + ax + 3 = x + 3a$,
즉 $x^2 + (a-1)x + 3 - 3a = 0$에서
$D = (a-1)^2 - 4(3-3a) < 0$
$a^2 + 10a - 11 < 0,\ (a+11)(a-1) < 0$
$\therefore\ -11 < a < 1$

15. 이차함수 $y = -x^2 + 2kx + 4k$ 의 최댓값이 5 일 때, 상수 k 의 값을 구하면? (단, $k > 0$)

① 7　　② 5　　③ 1　　④ 9　　⑤ 3

해설

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2 + 2kx + 4k \\
&= -(x^2 - 2kx + k^2 - k^2) + 4k \\
&= -(x-k)^2 + (k^2 + 4k)
\end{aligned}
$$

최댓값 $k^2 + 4k = 5$, $k^2 + 4k - 5 = 0$

$k = 1$ 또는 $k = -5$ 에서 $k > 0$ 이므로 $k = 1$

16. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① 1　　② $1-i$　　③ $1+i$　　④ -1　　⑤ 0

해설

$\frac{1+i}{1-i} = i$ 이므로

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = 1$$

17. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{14}$ 의 값은?

① -1　② $-\dfrac{1}{2}$　③ 0　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 1

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 $2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0, \alpha^3 = 1$

$\therefore\ \alpha^{3k+1} = \alpha, \alpha^{3k+2} = \alpha^2, \alpha^{3k} = 1$

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= (\alpha + \alpha^2 + 1) + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \\
&\quad \cdots + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \alpha + \alpha^2 \\
&= \alpha + \alpha^2 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

$(\because\ \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$