

1. 다항식 $f(x)$ 를 다항식 $g(x)$ 로 나눈 나머지를 $r(x)$ 라 할 때, $f(x) - g(x) - 2r(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 나머지는?

① $-2r(x)$

② $-r(x)$

③ 0

④ $r(x)$

⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x) = g(x)Q(x) + r(x)$$

$$\therefore f(x) - g(x) - 2r(x)$$

$$= g(x)Q(x) + r(x) - g(x) - 2r(x)$$

$$= g(x)\{Q(x) - 1\} - r(x)$$

여기서 $g(x)$ 의 차수는 $-r(x)$ 의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$ 이다.

2. 다항식 $2x^2 + 5ax - a^2$ 을 다항식 $P(x)$ 로 나눈 몫이 $x + 3a$, 나머지가 $2a^2$ 일 때, 다항식 $(x + a)P(x)$ 를 나타낸 것은?

① $x^2 + 2ax - 2a^2$

② $x^2 - a^2$

③ $2x^2 + 3ax + a^2$

④ $2x^2 - 3ax - a^2$

⑤ $2x^2 + ax - a^2$

해설

$2x^2 + 5ax - a^2 = P(x)(x + 3a) + 2a^2$ 이므로

$$P(x)(x + 3a) = 2x^2 + 5ax - 3a^2$$

따라서, 다항식 $P(x)$ 는 $2x^2 + 5ax - 3a^2$ 을 $x + 3a$ 로 나눈 몫이므로

$$P(x) = 2x - a$$

$$\begin{aligned}\therefore (x + a)P(x) &= (x + a)(2x - a) \\ &= 2x^2 + ax - a^2\end{aligned}$$

3. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$ 이고 $ab \neq 0$ 일 때, 다음 중 성립하는 것을 고르면? (단, 문자는 모두 실수이다.)

- ① $ax + by = 0$
- ② $a + b = x + y$
- ③ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
- ④ $x = y$
- ⑤ $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

해설

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = 0$ 을
간단히 정리하면
 $a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy = 0$
즉, $(ay - bx)^2 = 0$
 $\therefore ay - bx = 0$ ($\because a, x, b, y$ 는 실수)
따라서, $ay = bx$ 에서 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

4. $P = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$ 의 값을 구하면?

- ① $2^{32} - 1$ ② $2^{32} + 1$ ③ $2^{31} - 1$
④ $2^{31} + 1$ ⑤ $2^{17} - 1$

해설

주어진 식에 $(2 - 1) = 1$ 을 곱해도 값은 변하지 않으므로

$$\begin{aligned} P &= (2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) \\ &= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) \\ &= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) \\ &= \vdots \\ &= (2^{16} - 1)(2^{16} + 1) \\ &= 2^{32} - 1 \end{aligned}$$

5. $\frac{2005^3 + 1}{2005 \times 2004 + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

2005 = x 로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{x^3 + 1^3}{x(x-1) + 1} \\&= \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} \\&= x + 1 \\&= 2006\end{aligned}$$

6. 다음 중에서 겹넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$

② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$

④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겹넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$

모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$

대각선 : $d^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \therefore d = \sqrt{14}$

$= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$

$= 6^2 - 22 = 14$

7. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$x^2 - x + 1 = 0$, 양변에 $x + 1$ 을 곱하면,

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$x^3 + 1 = 0, x^3 = -1 \text{ 에서 } x^5 = x^3 \times x^2 = -x^2$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \dots\dots ①$$

$x^2 - x + 1 = 0$ 를 x 로 나누어 정리한다.

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = -1$$

$$① \text{ 에 대입하면, } x^5 + \frac{1}{x^5} = 1$$

8. $\frac{x+1}{3} = y-2$ 를 만족하는 모든 실수 x, y 에 대하여, 항상 $ax+by=7$ 이 성립할 때, a, b 의 값을 구하여라. (a, b 는 상수)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -1$

▷ 정답 : $b = 3$

해설

$$\frac{x+1}{3} = y-2, x+1 = 3(y-2)$$

$$x-3y = -7$$

$$-x+3y = 7 \Leftrightarrow ax+by = 7$$

$$\therefore a = -1, b = 3$$

9. 자연수 n 에 대하여 다항식 $f(x) = x^n(x^2 + ax + b)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2^n(x-2)$ 일 때, $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나눈 나머지는?

① $2 \cdot 3^n$ ② 3^n ③ 3^{n+1} ④ $4 \cdot 3^n$ ⑤ 3^{2n}

해설

$$\begin{aligned}x^n(x^2 + ax + b) &= (x-2)^2 Q(x) + 2^n(x-2) \\x^n(x^2 + ax + b) &= x^n(x-2)(x+\alpha) \text{이라 하면} \\x^n(x-2)(x+\alpha) &= (x-2)\{(x-2)Q(x) + 2^n\} \\\therefore x^n(x+\alpha) &= (x-2)Q(x) + 2^n \\\text{양변에 } x=2 \text{를 대입하면} \\2^n(2+\alpha) &= 2^n \\2+\alpha &= 1 \\\therefore \alpha &= -1 \\x^2 + ax + b &= (x-1)(x-2) \\\therefore a &= -3, b = 2 \\f(x) &= x^n(x^2 - 3x + 2) \text{이므로} \\f(3) &= 3^n(9 - 9 + 2) \\&= 2 \times 3^n\end{aligned}$$

10. 다항식 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$ 을 $x - 2$, $x - 1$ 로 나누었을 때의 나머지를 각각 a, b 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① -8 ② -2 ③ -16 ④ 4 ⑤ 2

해설

$$f(x) = (x - 2)Q(x) + a$$

$$f(x) = (x - 1)Q'(x) + b$$

$$f(2) = 4 = a, \quad f(1) = -2 = b$$

$$\therefore a + b = 2$$

11. $x^{113} + 1$ 을 $x^3 + x$ 로 나누었을 때, 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라고 하자. 이때, $R(2006)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2007

해설

$$\begin{aligned}x^{113} + 1 &= (x^3 + x)Q(x) + R(x) \\ &= x(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c\end{aligned}$$

항등식이므로 $x = 0, x^2 = -1$ 을 각각 대입하면,

$$1 = c, \quad x + 1 = -a + bx + c$$

$$\therefore a = 0, \quad b = 1$$

$$\therefore R(x) = x + 1$$

$$\text{따라서 } R(2006) = 2007$$

12. x^8 을 $x + \frac{1}{2}$ 으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, $Q\left(-\frac{1}{2}\right)$ 을 구하면?

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $-\frac{1}{8}$ ④ $-\frac{1}{16}$ ⑤ $-\frac{1}{32}$

해설

$$\begin{aligned}x^8 &= \left(x + \frac{1}{2}\right) Q(x) + R \\x = -\frac{1}{2} \text{ 를 대입하면 } R &= \frac{1}{2^8} \\x^8 &= \left(x + \frac{1}{2}\right) Q(x) + \frac{1}{2^8} \\x^8 - \frac{1}{2^8} &= \left(x + \frac{1}{2}\right) Q(x) \\ \left(x^4 + \frac{1}{2^4}\right) \left(x^2 + \frac{1}{2^2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) \\&= \left(x + \frac{1}{2}\right) Q(x) \\ \left(x^4 + \frac{1}{2^4}\right) \left(x^2 + \frac{1}{2^2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) &= Q(x) \\\therefore Q\left(-\frac{1}{2}\right) \\&= \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4}\right) \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \\&= -\frac{1}{16}\end{aligned}$$

13. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x) + g(x)$ 를 $x^2 + 3x - 15$ 으로 나누면 나머지가 12이다. 또 $f(x) - g(x)$ 를 $x^2 + 3x - 15$ 로 나누면 나머지가 -2이다.

이때, $f(x)$ 를 $x^2 + 3x - 15$ 으로 나눈 나머지는?

- ① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 24

해설

$$f(x) + g(x) = (x^2 + 3x - 15) Q_1(x) + 12 \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) - g(x) = (x^2 + 3x - 15) Q_2(x) - 2 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$2f(x) = (x^2 + 3x - 15) (Q_1(x) + Q_2(x)) + 10$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (x^2 + 3x - 15) (Q_1(x) + Q_2(x)) + 5$$

$\therefore$ 나머지는 5

14. 다항식 $f(x)$ 를 $(x+2)(x-1)$, x^2+2x+2 로 나눈 나머지가 각각 16, $-11x+2$ 라고 한다. 이 때, $f(x)$ 를 $(x+2)(x-1)(x^2+2x+2)$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라고 하면 $R(0)$ 의 값은?

- ① 6 ② 8 ③ -2 ④ 1 ⑤ -4

해설

$R(x)$ 는 삼차 이하의 다항식이므로
 $R(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 라 하면
 $f(x) = (x+2)(x-1)Q_1(x) + 16 \cdots \textcircled{1}$
 $f(x) = (x^2+2x+2)Q_2(x) - 11x + 2$
 $f(x) = (x+2)(x-1)(x^2+2x+2)Q_3(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d$
 $= (x+2)(x-1)(x^2+2x+2)Q_3(x) + (ax+k)(x^2+2x+2) - 11x + 2$
 $= (x^2+2x+2)\{(x+2)(x-1)Q_3(x) + ax+k\}$
 $- 11x + 2 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서
 $f(1) = 16 = 5(a+k) - 11 + 2$
 $\therefore a+k = 5 \cdots \textcircled{3}$
 $f(-2) = 16 = 2(-2a+k) + 22 + 2$
 $\therefore -2a+k = -4 \cdots \textcircled{4}$
 $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ 에서 $a = 3, k = 2$
따라서
 $R(x) = (3x+2)(x^2+2x+2) - 11x + 2$
 $\therefore R(0) = 6$

15. a, b 가 양의 정수이고, 다항식 $f(x) = x^4 + ax^3 + x^2 + bx - 2$ 이다. $f(x)$ 가 일차식 $x - \alpha$ 를 인수로 갖게 하는 정수 α 의 값과 $a, b(a > b)$ 의 값에 대하여 $\alpha^2 + a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

a 가 될 수 있는 상수항 -2 의 약수인 $\pm 1, \pm 2$ 을 준식에 차례로 대입해 보면

$$f(1) = 1 + a + 1 + b - 2 = 0, \quad a + b = 0$$

$$f(-1) = 1 - a + 1 - b - 2 = 0, \quad a + b = 0$$

$$f(2) = 16 + 8a + 4 + 2b - 2 = 0, \quad 4a + b = -9$$

$$f(-2) = 16 - 8a + 4 - 2b - 2 = 0, \quad 4a + b = 9$$

그런데, 위의 세 식은 a, b 가 양의 정수라는 조건을 충족시키지 못한다.

$$\therefore \alpha = -2 \text{ 이고 } 4a + b = 9$$

$$\alpha = -2, a = 2, b = 1 \quad (\because a > b)$$

$$\therefore \alpha^2 + a^2 + b^2 = 9$$

16. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

- ① -8
- ② -4
- ③ 0
- ④ 4
- ⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.

i) $x = 3 \Rightarrow e = 1$
ii) $x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$
iii) $x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$
iv) $x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$
v) $x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$
위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.
 $a = 1, b = 4, c = 6, d = 4, e = 1$
 $\therefore 2c - bd = -4$

해설

$x - 2 = t$ 라 하면 $x - 3 = t - 1$
(준식) : $t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$
다음처럼 조립제법으로 $t-1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

1	1	0	0	0	0
		1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
		1	2	3	
1	1	2	3	4	
		1	3		
1	1	3	6		
		1			
a=1	1	4			

$\therefore 2c - bd = -4$

17. 다음 중 인수분해가 잘못된 것을 고르면?

① $(x-y)^2 - xy(y-x) = (x-y)(x-y+xy)$

② $3a^2 - 27b^2 = 3(a+3b)(a-3b)$

③ $64a^3 - 125 = (4a+5)(16a^2 - 20a + 25)$

④ $(x^2 - x)(x^2 - x + 1) - 6 = (x^2 - x + 3)(x+1)(x-2)$

⑤ $2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3)$

해설

$$\begin{aligned} & 64a^3 - 125 \\ &= (4a)^3 - (5)^3 \\ &= (4a-5)(16a^2 + 20a + 25) \end{aligned}$$

18. $a^2b + b^2c - b^3 - a^2c$ 을 인수분해하면?

① $(a + b)(a - b)(b + c)$

② $(a - b)(b - c)(c + a)$

③ $(a - b)(a + b)(b - c)$

④ $(a - b)(a + b)(c - a)$

⑤ $(a - b)(b + c)(c - a)$

해설

$$\begin{aligned} & a^2b + b^2c - b^3 - a^2c \\ &= a^2(b - c) - b^2(b - c) \\ &= (a - b)(a + b)(b - c) \end{aligned}$$

19. $(x^2 + x)(x^2 + x + 1) - 6$ 을 인수분해하면?

- ① $(x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 3)$ ② $(x - 1)(x + 2)(x^2 + x - 3)$
③ $(x - 2)(x + 1)(x^2 + x + 3)$ ④ $(x - 1)(x + 2)(x^2 - x + 3)$
⑤ $(x + 1)(x - 2)(x^2 - x + 3)$

해설

$x^2 + x = X$ 라 하자.

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= X(X + 1) - 6 \\&= X^2 + X - 6 \\&= (X + 3)(X - 2) \\&= (x^2 + x + 3)(x^2 + x - 2) \\&= (x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 3)\end{aligned}$$

20. $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2(ac + bd)$ 를 바르게 인수분해 한 것은?

① $(a + b - c - d)(a - b + c + d)$

② $(a + b + c + d)(a - b + c - d)$

③ $(a + b + c - d)(a - b + c + d)$

④ $(a - b + c - d)(a - b + c + d)$

⑤ $(a + b + c + d)(a - b - c + d)$

해설

$$\begin{aligned} & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2(ac + bd) \\ &= (a^2 + 2ac + c^2) - (b^2 - 2bd + d^2) \\ &= (a + c)^2 - (b - d)^2 \\ &= (a + b + c - d)(a - b + c + d) \end{aligned}$$

21. $\frac{2012^3 + 1}{2012 \times 2011 + 1}$ 의 값을 a 라 할 때, $\frac{a+1}{a-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1007}{1006}$

해설

$$\begin{aligned} a &= \frac{(2012+1)(2012^2-2012+1)}{(2012^2-2012+1)} \\ &= 2013 \text{ 이므로} \\ \therefore \frac{a+1}{a-1} &= \frac{2013+1}{2013-1} = \frac{2014}{2012} = \frac{1007}{1006} \end{aligned}$$

22. $a-b=3$, $b-c=1$ 일 때, $ab^2-a^2b+bc^2-b^2c+ca^2-c^2a$ 의 값은?

① -14

② -12

③ -8

④ -4

⑤ 0

해설

$$a-b=3 \quad \cdots \textcircled{A}, \quad b-c=1 \quad \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}+\textcircled{B} \text{에서 } a-c=4$$

$$\therefore ab^2-a^2b+bc^2-b^2c+ca^2-c^2a$$

$$=ab(b-a)+c^2(b-a)-c(b^2-a^2)$$

$$ab(b-a)+(b-a)\{c^2-c(b+a)\}$$

$$=(b-a)(ab+c^2-bc-ca)$$

$$=(b-a)\{a(b-c)+c(c-b)\}$$

$$=(b-a)(b-c)(a-c)$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$=3 \times 1 \times (-4) = -12$$

23. 다음 세 다항식에서 최대공약수를 구하면?

$2x^2 - 3x + 1, \quad 3x^2 - x - 2, \quad x^2 + 3x - 4$

- ① $x - 1$

② $2x - 1$

③ $x - 2$

④ $x + 3$

⑤ $x + 1$

해설

$2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1)$ $3x^2 - x - 2 = (3x + 2)(x - 1)$ $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$ 따라서 최대 공약수는 $x - 1$ 이다.

24. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2, 2x^3 + (a - 2)x^2 - 2x$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$x^3 + 2x^2 - x - 3 = x^2(x + 2) - (x + 2)$
 $= (x + 2)(x - 1)(x - 2)$
 $2x^3 + (a - 2)x^2 - 2x = x(2x^2 + (a - 2)x - 2) \cdots \textcircled{1}$
두 식의 최대 공약수가 이차식이므로
 $x = -2, -1, 1$ 을 $\textcircled{1}$ 식에 대입하면
식의 값이 동시에 0이 되는 경우가 있어야 한다.
 $x = -2$ 일 때, $8 - 2a + 4 - 2 = 0, a = 5$
 $x = -1$ 일 때, $2 - a + 2 - 2 = 0, a = 2$
 $x = 1$ 일 때, $2 + a - 2 - 2 = 0, a = 2$
 $x = -1, 1$ 일때, 일치함
최대 공약수는 $(x + 1)(x - 1)$
 $\therefore a = 2$

25. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2 - 8$ 이고, 최소공배수가 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 일 때, 두 다항식의 최대공약수는 $ax + b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 3

해설

두 식 A, B 의 최대공약수를 G 라 하면
 $A = Ga, B = Gb(a, b$ 는 서로소)
 $A + B = (a + b)G = 2(x + 2)(x - 2)$
 $L = abG = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$
 $\therefore G = x + 2$