1. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2의 제곱근은 $\sqrt{2}i$와 $-\sqrt{2}i$이다.

② $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=-\sqrt{(-2)(-3)}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\dfrac{-8}{-2}}$

⑤ $-\sqrt{-16}=-4i$

해설

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2i}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

2. 임의의 두 실수 $x,\ y$에 대하여 $(x+yi)(1+2i)+(xi-y)(-1-i)-(y+i)$가 실수일 때, 좌표평면에서 점 $(x,\ y)$로 표현되는 도형과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① 2　　② 1　　③ $\frac{1}{2}$　　④ $\frac{1}{4}$　　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

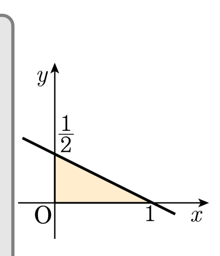
(준식) $= (2x-2y)+(x+2y-1)\,i = 0$

$\therefore\ x+2y-1=0,$

$y = -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$S = \frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ 넓이 $= \frac{1}{4}$



3. 복소수 $(1+i)x^2-(1-4i)x-(2-3i)$가 실수일 때의 x값과 순허수일 때의 x값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면

$(x^2-x-2)+(x^2+4x+3)i$

실수가 되기위해서는 $x^2+4x+3=0$

$(x+1)(x+3)=0 \therefore\ x=-3,\ -1$

순허수가 되기 위해서는

$x^2-x-2=0$이고 $x^2+4x+3\neq 0$

$x=-1,\ 2$이고 $x\neq -3,\ -1 \therefore\ x=2$

$(-3)\times(-1)\times 2=6$

4. 복소수 $(1-xi)(1-i)$가 순허수가 되도록 실수 x의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

$(1-xi)(1-i)=(1-x)+(-1-x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1-x=0$,
$x=1$

5. 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 3개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10 \cdots$ ㉠, $yz-x=0 \cdots$ ㉡

㉡을㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

z를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5,\ 5,\ 1)$, $(4,\ 2,\ 2)$, $(3,\ 1,\ 3)$ 3개

6. 복소수 $x = a+bi$(a, b는 실수)가 $x^2 = 3+4i$, $x^3 = 2+11i$ 를 만족할 때 $a+b$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} x^3 &= x^2 \times x \\ &= (3+4i)(a+bi) \\ &= (3a-4b)+(4a+3b)\,i \end{aligned}$$

$(3a-4b)+(4a+3b)\,i = 2+11i$

$3a-4b = 2, 4a+3b = 11$

$\therefore a = 2, b = 1$ 이므로 $a+b = 3$

해설

$x = \dfrac{x^3}{x^2} = a+bi$

$$\begin{aligned} \frac{2+11i}{3+4i} &= \frac{(2+11i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} \\ &= \frac{50+25i}{25} \\ &= 2+i \end{aligned}$$

$\therefore a = 2, b = 1$

7. $f(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1000}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)-f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$의 값을 구하면?

① i ② 2 ③ 1 ④ 0 ⑤ $2i$

해설

$\frac{1-i}{1+i}=-i,\ \frac{1+i}{1-i}=i$

$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)-f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$

$=f(-i)-f(i)$

$=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1000}-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1000}$

$=(-i)^{1000}-(i)^{1000}$

$=1-1$

$=0$

8. 두 복소수 α, β에 대하여 연산 $\odot$ 을 $\alpha \odot \beta = \alpha\beta + (\alpha+\beta)i$ 라 할 때, 등식 $(1+i)\odot z = 1$ 을 만족시키는 복소수 z의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1 ② $-i$ ③ i

④ $1-i$ ⑤ $-1+i$

해설

$\alpha \odot \beta = \alpha\beta + (\alpha+\beta)i$ 이므로

$z = x + yi$ (단, x, y는 실수)라 하면

$(1+i)\odot(x+yi)$

$= (1+i)(x+yi) + (x+1+yi+i)i$

$= x - y + (x+y)i - (y+1) + (x+1)i$

$= x - 2y - 1 + (2x+y+1)i = 1$

$\therefore\ x - 2y - 1 = 1 \ \cdots$ ㉠, $2x + y + 1 = 0 \ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $x = 0,\ y = -1$ $\quad \therefore\ z = -i$

9. 두 복소수 $\alpha = a - 2i$, $\beta = 5 + bi$에 대하여 $\alpha + \overline{\beta} = \overline{3 - 2i}$를 만족하는 실수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -6$

해설

$\alpha + \overline{\beta} = \overline{3 - 2i}$

$(a - 2i) + (5 - bi) = 3 + 2i$

$(a + 5) - (2 + b)i = 3 + 2i$

$\therefore\ a = -2, b = -4$

$\therefore\ a + b = -6$

10. 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$과 다음과 같다고 하자.

$$f(n)\begin{cases} i^{n+1}(n=4k) \\ -i^{n}(n=4k+1)(\text{단,k는정수}) \\ 2i(n=4k+2) \\ -i(n=4k+3) \end{cases}$$

(단,k 는 정수) 이 때, $f(1)+f(2)+\cdot\cdot\cdot+f(2005)$ 를 구하면?

① i ② $-i$ ③ 0 ④ $500i$ ⑤ $501i$

해설

$n=4k \Rightarrow f(n)={}^{4k+1}=i$
$n=4k+1 \ \Rightarrow \ f(n)=-i^{4k+1}=-i$
$n=4k+2 \ \Rightarrow \ f(n)=2\pi$
$n=4k+3 \ \Rightarrow \ f(n)=-i$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-i+2i-i+i=i$
계속 반복되므로
$f(1)+f(2)+\cdots+f(2005)$
$=i\times 501+f(2005)$
$=501i-i=500i$

11. 두 실수 a, b에 대하여 복소수 $z = a + bi$와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$의 곱 $z\bar{z} = 5$일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right)$를 간단히 하면?

① b ② $2b$ ③ 0 ④ $5a$ ⑤ a

해설

$z\bar{z} = 5, \quad \bar{z} = \frac{5}{z}$

$\therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$

12. $a,\ b$는 양수라 할 때, 다음 중 $z=a(1+i)+b(1-i), i=\sqrt{-1}$의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $1-3i$ ② $2+3i$ ③ $4-2i$
④ $-3+2i$ ⑤ $2-5i$

해설

$z=(a+b)+(a-b)i$ (a,b 는 양수)

① $1-3i$ 에서 $a+b=1,\ a-b=-3$
$a=-1,\ b=2 \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

② $2+3i$ 에서 $a+b=2,\ a-b=3$
$a=\frac{5}{2},\ b=-\frac{1}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

③ $4-2i$ 에서 $a+b=4,\ a-b=-2$
$a=1,\ b=3 \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건을 만족시킴

④ $-3+2i$ 에서 $a+b=-3,\ a-b=2$
$a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{5}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

⑤ $2-5i$ 에서 $a+b=2,\ a-b=-5$
$a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{7}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

13. $x+\frac{1}{x}=1$ 일 때, $x^3+5x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$ ② $\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$ ③ $\frac{5}{2}(2\pm\sqrt{3}i)$
④ $\frac{7}{2}(3\pm\sqrt{3}i)$ ⑤ $\frac{9}{2}(4\pm\sqrt{3}i)$

해설

$x+\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-x+1=0 \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(준식) $=x^3+\frac{1}{x^3}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3x$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\left(x+\frac{1}{x}\right)+3x$

$=3x$

$=\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$

14. $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{c}{b}}$, $|a+b| > |c|$인 $a,\ b,\ c$에 대하여 $\sqrt{(a+b+c)^2} - |a+b| - \sqrt{c^2}$의 값은?

① $2a$ ② $2b$ ③ $-2c$ ④ $-2a$ ⑤ $-3b$

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이므로, $a \le 0,\ b \le 0$

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{c}{b}}$ 이므로, $b < 0,\ c \ge 0$

$|a+b| > |c|$ 이므로, $-(a+b) > 0$

$\therefore\ a+b+c < 0$

$$\begin{aligned}\therefore(\text{주어진 식}) &= |a+b+c| - |a+b| - |c| \\ &= -(a+b+c) + (a+b) - c \\ &= -2c\end{aligned}$$

15. 모든 복소수 z 에 대하여 다음 중 실수인 것을 모두 고르면 ? (단 $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

㉠ $(z+1)^2$
㉡ $(2z+1)(\bar{z}+1)-z$
㉢ $(z^2+z+1)(\bar{z}+1)+\left((\bar{z})^2+\bar{z}+1\right)(z+1)$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ (반례) $z=i$ 이면 $(z+1)^2=(i+1)^2=2i$
(허수)

㉡ $(2z+1)(\bar{z}+1)-z=2z\bar{z}+(z+\bar{z})+1$ (실수)
($\because$ $z\bar{z}, z+\bar{z}$ 모두 실수이다.)

㉢ $(z^2+z+1)(\bar{z}+1)=Z$ 라 하면
(준식)$=Z+\overline{Z}$ 이므로 실수

따라서 실수인 것은 ㉡, ㉢이다.