

1. 다음 중 옳지 않은 것은?

① -2 의 제곱근은 $\sqrt{2}i$ 와 $-\sqrt{2}i$ 이다.

② $\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = -\sqrt{(-2)(-3)}$

③ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}i$

④ $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}} = \sqrt{\frac{-8}{-2}}$

⑤ $-\sqrt{-16} = -4i$

해설

$$\textcircled{3} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}} = \frac{\sqrt{2}}{2i} = -\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

2. 임의의 두 실수 x, y 에 대하여 $(x+yi)(1+2i) + (xi-y)(-1-i) - (y+i)$ 가 실수일 때, 좌표평면에서 점 (x, y) 로 표현되는 도형과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

- ① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

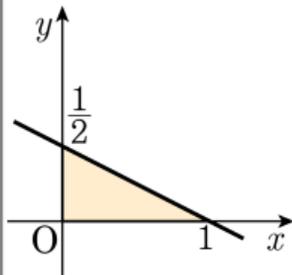
$$(\text{준식}) = (2x - 2y) + (x + 2y - 1)i = 0$$

$$\therefore x + 2y - 1 = 0,$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{넓이} = \frac{1}{4}$$



3. 복소수 $(1+i)x^2 - (1-4i)x - (2-3i)$ 가 실수일 때의 x 값과 순허수일 때의 x 값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면

$$(x^2 - x - 2) + (x^2 + 4x + 3)i$$

실수가 되기 위해서는 $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$(x+1)(x+3) = 0 \therefore x = -3, -1$$

순허수가 되기 위해서는

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{ 이고 } x^2 + 4x + 3 \neq 0$$

$$x = -1, 2 \text{ 이고 } x \neq -3, -1 \therefore x = 2$$

$$(-3) \times (-1) \times 2 = 6$$

4. 복소수 $(1 - xi)(1 - i)$ 가 순허수가 되도록 실수 x 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x = 1$

해설

$$(1 - xi)(1 - i) = (1 - x) + (-1 - x)i$$

순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1 - x = 0,$

$$x = 1$$

5. 등식 $(x + yi)(z - i) = 10$ 을 만족하는 자연수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답: 개

▷ 정답: 3개

해설

$$(xz + y) + (yz - x)i = 10$$

$$xz + y = 10 \cdots \textcircled{㉠}, yz - x = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡을㉠에 대입

$$y(z^2 + 1) = 10$$

z 를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5, 5, 1), (4, 2, 2), (3, 1, 3)$ 3개

6. 복소수 $x = a + bi$ (a, b 는 실수)가 $x^2 = 3 + 4i$, $x^3 = 2 + 11i$ 를 만족할 때 $a + b$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}x^3 &= x^2 \times x \\ &= (3 + 4i)(a + bi) \\ &= (3a - 4b) + (4a + 3b)i \\ (3a - 4b) + (4a + 3b)i &= 2 + 11i \\ 3a - 4b &= 2, 4a + 3b = 11 \\ \therefore a = 2, b = 1 &\text{ 이므로 } a + b = 3\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}x &= \frac{x^3}{x^2} = a + bi \\ \frac{2 + 11i}{3 + 4i} &= \frac{(2 + 11i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} \\ &= \frac{50 + 25i}{25} \\ &= 2 + i \\ \therefore a = 2, b = 1\end{aligned}$$

7. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1000}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) - f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하면?

① i

② 2

③ 1

④ 0

⑤ $2i$

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = -i, \quad \frac{1+i}{1-i} = i$$

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) - f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) \\ &= f(-i) - f(i) \\ &= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1000} - \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1000} \\ &= (-i)^{1000} - (i)^{1000} \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

8. 두 복소수 α, β 에 대하여 연산 \odot 을 $\alpha \odot \beta = \alpha\beta + (\alpha + \beta)i$ 라 할 때, 등식 $(1+i) \odot z = 1$ 을 만족시키는 복소수 z 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1

② $-i$

③ i

④ $1 - i$

⑤ $-1 + i$

해설

$\alpha \odot \beta = \alpha\beta + (\alpha + \beta)i$ 이므로

$z = x + yi$ (단, x, y 는 실수)라 하면

$$(1+i) \odot (x+yi)$$

$$= (1+i)(x+yi) + (x+1+yi+i)i$$

$$= x - y + (x+y)i - (y+1) + (x+1)i$$

$$= x - 2y - 1 + (2x + y + 1)i = 1$$

$$\therefore x - 2y - 1 = 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}, 2x + y + 1 = 0 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{에서 } x = 0, y = -1 \quad \therefore z = -i$$

9. 두 복소수 $\alpha = a - 2i$, $\beta = 5 + bi$ 에 대하여 $\alpha + \bar{\beta} = \overline{3 - 2i}$ 를 만족하는 실수 a, b 의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a + b = -6$

해설

$$\alpha + \bar{\beta} = \overline{3 - 2i}$$

$$(a - 2i) + (5 - bi) = 3 + 2i$$

$$(a + 5) - (2 + b)i = 3 + 2i$$

$$\therefore a = -2, b = -4$$

$$\therefore a + b = -6$$

10. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(n)$ 과 다음과 같다고 하자.

$$f(n) \begin{cases} i^{n+1} (n = 4k) \\ -i^n (n = 4k + 1) (\text{단, } k \text{는 정수}) \\ 2i (n = 4k + 2) \\ -i (n = 4k + 3) \end{cases}$$

(단, k 는 정수)이 때, $f(1) + f(2) + \cdots + f(2005)$ 를 구하면?

① i

② $-i$

③ 0

④ $500i$

⑤ $501i$

해설

$$n = 4k \Rightarrow f(n) = i^{4k+1} = i$$

$$n = 4k + 1 \Rightarrow f(n) = -i^{4k+1} = -i$$

$$n = 4k + 2 \Rightarrow f(n) = 2i$$

$$n = 4k + 3 \Rightarrow f(n) = -i$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = -i + 2i - i + i = i$$

계속 반복되므로

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(2005)$$

$$= i \times 501 + f(2005)$$

$$= 501i - i = 500i$$

11. 두 실수 a, b 에 대하여 복소수 $z = a + bi$ 와 쥘레복소수 $\bar{z} = a - bi$ 의 곱 $z\bar{z} = 5$ 일 때, $\frac{1}{2} \left(z + \frac{5}{z} \right)$ 를 간단히 하면?

① b

② $2b$

③ 0

④ $5a$

⑤ a

해설

$$z\bar{z} = 5, \quad \bar{z} = \frac{5}{z}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(z + \frac{5}{z} \right) = \frac{1}{2} (z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$$

12. a, b 는 양수라 할 때, 다음 중 $z = a(1+i) + b(1-i), i = \sqrt{-1}$ 의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $1 - 3i$

② $2 + 3i$

③ $4 - 2i$

④ $-3 + 2i$

⑤ $2 - 5i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)i$ (a, b 는 양수)

① $1 - 3i$ 에서 $a+b=1, a-b=-3$

$a=-1, b=2 \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

② $2 + 3i$ 에서 $a+b=2, a-b=3$

$a = \frac{5}{2}, b = -\frac{1}{2} \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

③ $4 - 2i$ 에서 $a+b=4, a-b=-2$

$a=1, b=3 \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건을 만족시킴

④ $-3 + 2i$ 에서 $a+b=-3, a-b=2$

$a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{5}{2} \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

⑤ $2 - 5i$ 에서 $a+b=2, a-b=-5$

$a = -\frac{3}{2}, b = \frac{7}{2} \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

13. $x + \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^3 + 5x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$

② $\frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$

③ $\frac{5}{2}(2 \pm \sqrt{3}i)$

④ $\frac{7}{2}(3 \pm \sqrt{3}i)$

⑤ $\frac{9}{2}(4 \pm \sqrt{3}i)$

해설

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^3 + \frac{1}{x^3} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3x \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 3x \\ &= 3x \\ &= \frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)\end{aligned}$$

14. $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{c}{b}}$, $|a+b| > |c|$ 인 a, b, c 에 대하여 $\sqrt{(a+b+c)^2} - |a+b| - \sqrt{c^2}$ 의 값은?

① $2a$

② $2b$

③ $-2c$

④ $-2a$

⑤ $-3b$

해설

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{ 이므로, } a \leq 0, b \leq 0$$

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{c}{b}} \text{ 이므로, } b < 0, c \geq 0$$

$$|a+b| > |c| \text{ 이므로, } -(a+b) > 0$$

$$\therefore a+b+c < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= |a+b+c| - |a+b| - |c| \\ &= -(a+b+c) + (a+b) - c \\ &= -2c \end{aligned}$$

15. 모든 복소수 z 에 대하여 다음 중 실수인 것을 모두 고르면 ? (단 \bar{z} 는 z 의 켈레복소수이다.)

㉠ $(z + 1)^2$

㉡ $(2z + 1)(\bar{z} + 1) - z$

㉢ $(z^2 + z + 1)(\bar{z} + 1) + ((\bar{z})^2 + \bar{z} + 1)(z + 1)$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ (반례) $z = i$ 이면 $(z + 1)^2 = (i + 1)^2 = 2i$
(허수)

㉡ $(2z + 1)(\bar{z} + 1) - z = 2z\bar{z} + (z + \bar{z}) + 1$ (실수)
($\because z\bar{z}, z + \bar{z}$ 모두 실수이다.)

㉢ $(z^2 + z + 1)(\bar{z} + 1) = Z$ 라 하면
(준식) $= Z + \bar{Z}$ 이므로 실수
따라서 실수인 것은 ㉡, ㉢이다.