

1. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$ 이고 $ab \neq 0$ 일 때, 다음 중 성립하는 것을 고르면? (단, 문자는 모두 실수이다.)

① $ax + by = 0$

② $a + b = x + y$

③ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

④ $x = y$

⑤ $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

해설

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = 0 \text{ 을}$$

간단히 정리하면

$$a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy = 0$$

$$\text{즉, } (ay - bx)^2 = 0$$

$$\therefore ay - bx = 0 (\because a, x, b, y \text{ 는 실수})$$

$$\text{따라서, } ay = bx \text{ 에서 } \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

2. 모든 모서리의 합이 36, 겹넓이가 56인 직육면체의 대각선의 길이는?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a , b , c 라 하자.

$$4(a + b + c) = 36, 2(ab + bc + ca) = 56$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 81 - 56 = 25$$

$$\therefore (\text{대각선의 길이}) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ = \sqrt{25} = 5$$

3. $f(x)$ 가 x 의 다항식일 때 $(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 가 x 에 대한 항등식이 될 때 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 에서

$x^2 = 2$ 를 대입하면 $0 = 16 + 4a + b \cdots \textcircled{1}$

$x^4 = -1$ 을 대입하면 $0 = 1 - a + b \cdots \textcircled{2}$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -3, b = -4$

$\therefore a + b = -7$

4. $(4x^2 - 3x + 1)^5(x^3 - 2x^2 - 1)^4$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 512

해설

$(4x^2 - 3x + 1)^5(x^3 - 2x^2 - 1)^4 = ax^{22} + bx^{21} + \cdots + c$
위의 식에 $x = 1$ 을 대입하면, 모든 계수들의 총합이 나온다.
 $\therefore$ (계수의 총합) $= 2^5 \times (-2)^4 = 512$

5. 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x+2$ 로 나누면 3이 남고, x^2-1 로 나누면 떨어진다. 이 때, abc 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$x^3+ax^2+bx+c=(x+2)Q_1(x)+3$$

$$=(x+1)(x-1)Q_2(x)$$

$$f(-2)=3 \quad f(1)=0 \quad f(-1)=0$$

$$x=-2 \text{ 대입, } -8+4a-2b+c=3$$

$$x=-1 \text{ 대입, } -1+a-b+c=0$$

$$x=1 \text{ 대입, } 1+a+b+c=0$$

세 식을 연립해서 구하면

$$a=3, b=-1, c=-3$$

$$\therefore abc=9$$

6. $x^4 - 23x^2y^2 + y^4$ 을 인수분해 하면?

① $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

② $(x^2 + 2xy + y^2)(x^2 - 2xy + y^2)$

③ $(x^2 + 3xy + y^2)(x^2 - 3xy + y^2)$

④ $(x^2 + 4xy + y^2)(x^2 - 4xy + y^2)$

⑤ $(x^2 + 5xy + y^2)(x^2 - 5xy + y^2)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 25x^2y^2 \\&= (x^2 + y^2)^2 - (5xy)^2 \\&= (x^2 + y^2 + 5xy)(x^2 + y^2 - 5xy) \\&= (x^2 + 5xy + y^2)(x^2 - 5xy + y^2)\end{aligned}$$

7. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \quad (\text{단, } a \neq b \neq c)$$

- ① -1 ② 1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} (\text{준 식}) &= \frac{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(c-b)a^2 - (c^2 - b^2)a + bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(c-b)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1 \end{aligned}$$

8. x 에 대한 이차식 $A = x^2 + ax + b$, $B = x^2 + bx + a$ 의 최대공약수 G 가 x 에 대한 일차식이고 $A + B = G(px + q)$ 일 때, 상수 $a + b + p + q$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

G 는 $A + B, A - B$ 의 인수가 된다.

$$A - B = (a - b)x - (a - b) = (a - b)(x - 1)$$

$$\therefore G = x - 1$$

A 에 $x = 1$ 대입,

$$1 + a + b = 0, a + b = -1$$

$$\begin{aligned} A + B &= 2x^2 + (a + b)x + a + b \\ &= 2x^2 - x - 1 \\ &= (x - 1)(2x + 1) \end{aligned}$$

$$p = 2, q = 1$$

$$a + b + p + q = -1 + 2 + 1 = 2$$

9. x 에 대한 방정식 $(a-2)(x-a)=0$ 의 풀이 과정에서 다음 중 옳은 것은?

① $a=0$ 일 때, $x=2$

② $a \neq 2$ 일 때, $x=a$

③ $a=2$ 일 때, 불능

④ $a=0$ 일 때, 부정

⑤ 해는 없다.

해설

$$(a-2)(x-a)=0$$

$$\Rightarrow a=2 \text{ 또는 } x=a$$

i) $a=2$ 일 때 : 부정

ii) $a \neq 2$ 일 때 : $x=a$

10. 이차함수 $y = ax^2 - 6x + c$ 는 $x = -6$ 일 때, 최댓값 3 을 가진다. 이때, ac 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{15}{2}$

해설

$y = ax^2 - 6x + c$ 는 $x = -6$ 일 때,

최댓값 3 이므로

$$y = a(x+6)^2 + 3 = ax^2 + 12ax + 36a + 3$$

$$12a = -6, 36a + 3 = c \text{ 이므로}$$

$$a = -\frac{1}{2}, -18 + 3 = c, c = -15$$

$$\therefore ac = -\frac{1}{2} \times (-15) = \frac{15}{2}$$

11. 지면으로부터 20m 높이에서 초속 v m 로 쏘아 올린 공의 x 초 후의 높이를 y m 라 하면 x 와 y 사이에는 $y = 20 + \frac{v}{5}x - \frac{v}{10}x^2$ 의 관계가 있다. 공이 도달한 최고 높이가 25 m 일 때, 공의 속도를 구하여라.

▶ 답 : m/s

▷ 정답 : 50 m/s

해설

$$y = 20 + \frac{v}{5}x - \frac{v}{10}x^2 = -\frac{v}{10}(x-1)^2 + \frac{v}{10} + 20$$

이 물체는 $x = 1$ 일 때, 최고 높이 $\frac{v}{10} + 20$ 에 도달하고, $\frac{v}{10} + 20 = 25$ 이므로 $v = 50$ 이다.
따라서 공의 속도는 초속 50m 이다.

12. $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 를 구하여 x^2-y^2 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 또는 -12

해설

$$\begin{cases} x-y=2 & \cdots \textcircled{1} \\ x^2+y^2=20 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①에서 $y = x - 2$ 를

②식에 대입하면

$$x^2 + (x - 2)^2 = 20, 2x^2 - 4x + 4 - 20 = 0,$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$\therefore x^2 - y^2 = 16 - 4 = 12 \text{ 또는 } x^2 - y^2 = 4 - 16 = -12$$

13. 다음 일차부등식 중 두 부등식을 연립하여 풀었을 때, 해의 개수가 1인 것은?

보기

㉠ $3x - 1 \leq 2x + 5$

㉡ $2(3x + 1) \geq 5x + 8$

㉢ $\frac{x-2}{4} \leq \frac{4x}{3}$

㉣ $2x - 2 > 8 - 3x$

① ㉠과 ㉡

② ㉠과 ㉢

③ ㉡과 ㉣

④ ㉡과 ㉣

⑤ ㉢과 ㉣

해설

㉠ $3x - 1 \leq 2x + 5$ 에서 $x \leq 6$

㉡ $2(3x + 1) \geq 5x + 8$ 에서 $x \geq 6$

㉢ $\frac{x-2}{4} \leq \frac{4x}{3}$ 에서 $-\frac{6}{13} \leq x$

㉣ $2x - 2 > 8 - 3x$ 에서 $x > 2$

따라서 ㉠과 ㉡을 연립하였을 때 $x = 6$ 으로 해의 개수 1 개이다.

14. 연립부등식 $\begin{cases} 1.2x - 2 \leq 0.8x + 3.2 \\ 3 - \frac{x-2}{4} < \frac{2x-3}{2} \end{cases}$ 의 해가 $a < x \leq b$ 일 때, $a - b$

의 값은?

- ① $-\frac{54}{5}$ ② $-\frac{49}{5}$ ③ $-\frac{9}{2}$ ④ $-\frac{5}{2}$ ⑤ -9

해설

i) $1.2x - 2 \leq 0.8x + 3.2$ 의 양변에 10 을 곱하면

$$12x - 20 \leq 8x + 32$$

$$4x \leq 52$$

$$x \leq 13$$

ii) $3 - \frac{x-2}{4} < \frac{2x-3}{2}$ 의 양변에 4 를 곱하면

$$12 - (x - 2) < 2(2x - 3)$$

$$12 - x + 2 < 4x - 6$$

$$20 < 5x$$

$$4 < x$$

$$\therefore 4 < x \leq 13$$

15. 연립부등식 $\begin{cases} 4x + a \leq 3x \\ 7 > -4x - 5 \end{cases}$ 의 해가 없을 때, a 의 값의 범위는?

① $a \leq -3$

② $a \leq -1$

③ $a \leq 0$

④ $a \geq 1$

⑤ $a \geq 3$

해설

$$\begin{cases} 4x + a \leq 3x \\ 7 > -4x - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -a \\ x > -3 \end{cases}$$

해가 없으므로 $-a \leq -3$

$$\therefore a \geq 3$$

16. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$ 의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① $a = b$ 인 이등변삼각형 ② $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형
③ $b = c$ 인 이등변삼각형 ④ $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형
⑤ 정삼각형

해설

$$\begin{aligned} a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 &= 0 \\ a^2(a+b) + b^2(a+b) - c^2(a+b) &= 0 \\ (a+b)(a^2 + b^2 - c^2) &= 0 \\ a = -b \quad \text{또는} \quad c^2 = a^2 + b^2 \\ a, b, c \text{ 모두 양수이므로, } c^2 &= a^2 + b^2 \\ \therefore \angle C = 90^\circ \text{인 직각삼각형} \end{aligned}$$

17. 두 다항식 A, B 에 대하여 $\{A, B\} = A^2 + B^2 - AB$ 라 할 때, $\{x^2 + 1, 2x^2 - 3\} - 7$ 을 실수 범위에서 인수분해한다. 이 때, 인수가 아닌 것은?

- ① $x - \sqrt{2}$
- ② $x - 1$
- ③ x
- ④ $x + 1$
- ⑤ $x + \sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} & \{x^2 + 1, 2x^2 - 3\} - 7 \\ &= (x^2 + 1)^2 + (2x^2 - 3)^2 - (x^2 + 1)(2x^2 - 3) - 7 \\ &= x^4 + 2x^2 + 1 + 4x^4 - 12x^2 + 9 - 2x^4 + x^2 + 3 - 7 \\ &= 3x^4 - 9x^2 + 6 \\ &= 3(x^4 - 3x^2 + 2) \\ &= 3(x^2 - 1)(x^2 - 2) \\ &= 3(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

18. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

- ① 1 ② $1-i$ ③ $1+i$ ④ -1 ⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = i \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = 1$$

19. x, y 가 실수이고, 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 와의 곱이 $z \cdot \bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) i$ 의 값은?

- ① $\frac{y}{2}$ ② $-y$ ③ $2x$ ④ $\frac{-x}{2}$ ⑤ 100

해설

$z \cdot \bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{그러므로 } \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) i &= \frac{1}{2} (z - \bar{z}) i \\ &= \frac{1}{2} (x + yi - x + yi) i \\ &= \frac{1}{2} (2yi) i = -y \end{aligned}$$

20. $w = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$ 일 때, $(w + 2w^2)^2 + (2w + w^2)^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned}w &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \\ \therefore w^2 + w + 1 &= 0, \quad w^3 = 1 \\ \therefore (w + 2w^2)^2 + (2w + w^2)^2 & \\ &= (w - 2w - 2)^2 + (2w - w - 1)^2 \\ &= (-w - 2)^2 + (w - 1)^2 \\ &= w^2 + 4w + 4 + w^2 - 2w + 1 \\ &= 2w^2 + 2w + 5 \\ &= 2(w^2 + w + 1) + 3 \\ &= 3\end{aligned}$$

21. x 에 대한 이차방정식 $3x^2 - (2k + 5)x + 3 = 0$ 의 두 근 중 한 근을 α 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\alpha} = k^2$ 이 성립한다. 이때, 양수 k 의 값을 구하면?

- ① 2 ② $\frac{5}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 3

해설

두 근의 곱이 1이므로 한 근이 a 이면

다른 한 근은 $\frac{1}{a}$ 이다.

$$\therefore a + \frac{1}{a} = k^2 = \frac{2k+5}{3}$$

$$\therefore 3k^2 - 2k - 5 = 0$$

$$k = \frac{5}{3} \text{ 또는 } -1$$

$$\therefore \text{양수 } k = \frac{5}{3}$$

22. $x^2 + ax + (a^2 + 2a - 3) = 0$ 의 두 근이 서로 다른 부호를 갖고 양근이 음근의 절댓값보다 작을 때, 상수 a 의 범위를 구하면?

- ① $0 < a < 1$ ② $\frac{1}{2} < a < 2$ ③ $1 \leq a < 2$
④ $2 < a \leq 3$ ⑤ $-\frac{1}{2} < a < 2$

해설

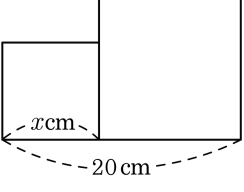
두 근을 α, β 라 하면

$|\text{음근}| > \text{양근}$ 이므로

$$\alpha + \beta = -a < 0, \quad \alpha\beta = a^2 + 2a - 3 < 0$$

$$\therefore 0 < a < 1$$

23. 다음 그림과 같이 길이가 20cm 인 선분을 두 부분으로 나누어, 그 각각을 한 변으로 하는 정사각형 두 개를 만들려고 한다. 두 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.



▶ 답 : cm

▷ 정답 : 10 cm

해설

작은 정사각형의 한 변의 길이를 x , 큰 정사각형의 한 변의 길이를 $20 - x$,
넓이를 y 라고 하면
$$y = x^2 + (20 - x)^2$$
$$= 2x^2 - 40x + 400$$
$$= 2(x - 10)^2 + 200$$

따라서 $x = 10$ 일 때, 최솟값 200 을 갖는다.

24. 연립방정식 $\begin{cases} x(y+z) = 10 \\ y(z+x) = 18 \\ z(x+y) = 24 \end{cases}$ 의 해를 $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma$ 라 할 때,
 $\alpha\beta\gamma$ 의 값은?

- ① ± 2 ② ± 4 ③ ± 8 ④ ± 16 ⑤ ± 32

해설

$$\begin{cases} x(y+z) = 10 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ y(z+x) = 18 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ z(x+y) = 24 & \cdots \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢} : 2(xy + yz + zx) = 52$

$\therefore xy + yz + zx = 26$

$\therefore xy = 2, yz = 16, zx = 8 \cdots \cdots \textcircled{㉤}$

$\textcircled{㉤}$ 에서 $(xyz)^2 = 16^2 \therefore xyz = \pm 16$

$\therefore x = \alpha = \pm 1, y = \beta = \pm 2, z = \gamma = \pm 8$ (복부호동순)

$\therefore \alpha\beta\gamma = \pm 16$

25. 거리가 100 m인 두 지점 A, B가 있다. 갑은 A에서 출발하며 B로 달리고, 을은 B에서 출발하여 A로 자전거를 타고 달렸다. 두 사람은 동시에 출발하여 P지점에서 만났는데 만나고 나서 갑은 8초 후에 B에, 을은 2초 후에 A에 도착하였다. 갑, 을이 각각 일정한 속도로 달렸다고 할 때, A, P사이의 거리는?

- ① 20 m

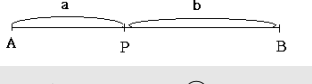
② 30 m

③ $\frac{100}{3}$ m
- ④ $\frac{121}{4}$ m

⑤ $\frac{147}{5}$ m

해설

갑의 속도를 α , 을의 속도를 β 라 하자.



$$a + b = 100 \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}, \quad \frac{b}{\alpha} = 8, \quad \frac{a}{\beta} = 2$$

$$\text{정리하면 } \frac{a}{\left(\frac{b}{8}\right)} = \frac{b}{\left(\frac{a}{2}\right)} \text{에서}$$

$$\frac{a^2}{2} = \frac{b^2}{8}, \quad 4a^2 = b^2$$

$$\therefore b = 2a (\because a, b \text{는 양수})$$

$$\textcircled{1} \text{에 대입하면, } 3a = 100 \quad a = \frac{100}{3} \text{ m}$$