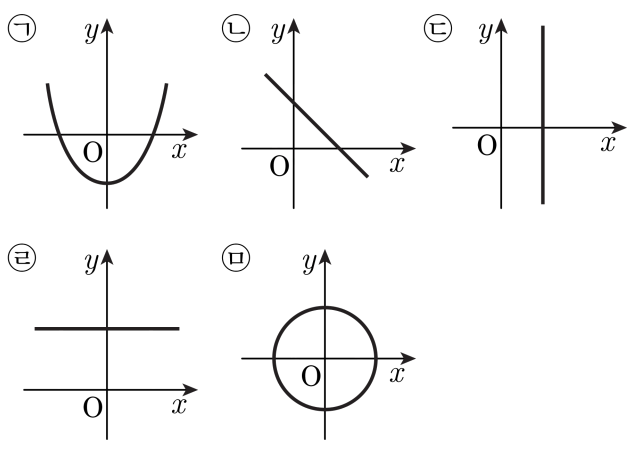
1. 다음 그래프 중 함수인 것은 모두 몇 개인가?

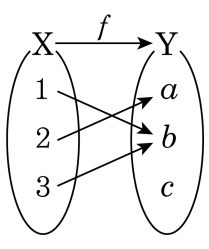


① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

주어진 그래프가 함수가 되기 위해서는 집합 X의 각 원소 x의 함수값 $f(x)$가 하나로 결정되어야 한다. 그러나 ㉢, ㉤은 x의 함수값 $f(x)$가 두개 이상인 점이 존재하므로 함수가 될 수 없다.

2. 아래 그림은 집합 X에서 집합 Y로의 함수$f : X \to Y$를 나타낸 것이다. f의 정의역, 공역, 치역을 순서대로 나열한 것은?



① $\{a, b, c\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}$

② $\{a, b, c\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}$

③ $\{1, 2, 3\}, \{a, b\}, \{a, b\}$

④ $\{1, 2, 3\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}$

⑤ $\{1, 2, 3\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c\}$

해설

3. 다음 (　　) 안에 알맞은 말을 써라.

> 함수 $f(x)$ 의 치역과 공역이 같고, 정의역의 서로 다른 원소에 치역의 서로 다른 원소가 대응할 때, 이 함수를 (　　) 이라고 한다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 일대일대응

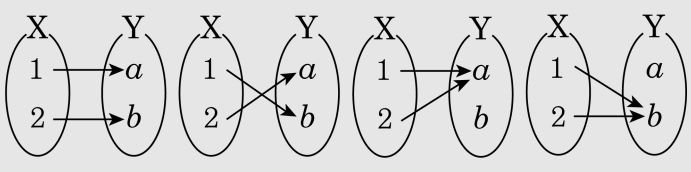
해설

4. 집합 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a, b\}$ 라 할 때, 집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 구하면?

① 1 가지 ② 2 가지 ③ 3 가지

④ 4 가지 ⑤ 5 가지

해설



∴ 4가지

5. 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -3x + 2$ 의 합성함수 $g \circ f$ 를 구하면 무엇인가?

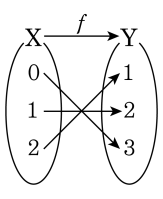
① $y = -6x - 1$ ② $y = -6x$ ③ $y = -6x + 1$

④ $y = -6x + 3$ ⑤ $y = -6x + 5$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$ 이다.

6. 다음 그림의 함수 f 에 대하여 $f^{-1}(1) + f^{-1}(2)$ 의 값을 구하면?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2) = 1, \quad f(1) = 2 \Rightarrow f^{-1}(1) = 2, \quad f^{-1}(2) = 1$

$\therefore \ f^{-1}(1) + f^{-1}(2) = 2 + 1 = 3$

7. 함수 $f(x)=2x-5$ 의 역함수를 $y=f^{-1}(x)$ 라 할 때, $f^{-1}(-3)$ 의 값은 얼마인가?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$f(x)=y=2x-5$ 에서 x 와 y 를 바꾸면 $x=2y-5$
$x=2y-5$ 를 y 에 대하여 정리하면

$$y=\frac{1}{2}(x+5)$$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+5)$$

$\therefore f^{-1}(-3)=1$
|다른풀이| $f^{-1}(-3)=a$ 로 놓으면
$f(a)=-3$ 에서 $f(a)=2a-5=-3$, $2a=2$
$\therefore a=f^{-1}(-3)=1$

8. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x)=|x|$　　② $f(x)=-x^2$

③ $f(x)=3x$　　④ $f(x)=2x+3$

⑤ $f(x)=x^3+3x$

해설

① $f(a+b)=|a+b|$
$f(a)+f(b)=|a\,|+|b\,|$
이 때 $|a+b|\le|a|+|b|$

② $f\ (a+b)=-(a+b)^2=-a^2-2ab-b^2$
$f(a)+f(b)=-a^2-b^2$

③ $f(a+b)=3(a+b)=3a+3b=f(a)+f(b)$

④ $f(a+b)=2(a+b)+3$
$f(a)+f(b)=2a+3+2b+3=2(a+b)+6$

⑤ $\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b)^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2+3) \\ f(a)+f(b) &= a^3+3a+b^3+3b \\ &= a^3+b^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2+3) \end{aligned}$

9. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=2x^2-10x-5$, $g(x)=-x^2+2x+10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x)=g(x)$이므로
$2x^2-10x-5=-x^2+2x+10$에서
$3x^2-12x-15=0$, $3(x^2-4x-5)=0$
$(x-5)(x+1)=0$
$\therefore\ x=5,\ -1$
즉, $x=5$ 또는 $x=-1$일 때 $f(x)=g(x)$이다.
$\therefore\ X=\{-1\},\ \{5\},\ \{-1,\ 5\}$

10. 실수전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 f 는 항등함수이고 $g(x) = -3$(x 는 실수) 일 때, $f(2) + g(4)$ 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

f 는 항등함수이므로 $f(x) = x$
$\therefore\ f(2) = 2$
모든 실수 x 에 대하여
$g(x) = -3$ 이므로 g 는 상수함수이다.
$\therefore\ g(4) = -3$
$\therefore\ f(2) + g(4) = 2 + (-3) = -1$ 이다.

11. 함수 $f(x)$가 $f(2x+1)=3x+2$를 만족할 때, $f(3)$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2x+1)=3x+2$ 에서 $2x+1=3$ 이므로
$x=1$ 을 대입하면
$f(2\cdot 1+1)=f(3)=3\cdot 1+2=5$

12. 다음 보기는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x)$ 를 나타낸 것이다. 역함수가 존재하는 것을 모두 고르면 무엇인가?

ㄱ $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ x & (x<0) \end{cases}$

ㄴ $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x \geq 1) \\ 1-x & (x<1) \end{cases}$

ㄷ $f(x)=\begin{cases} x & (x \geq 0) \\ x+3 & (x<0) \end{cases}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

함수 $f(x)$가 일대일대응일 때
역함수가 존재한다.
이 때, 보기의 그래프는 다음 그림과 같다.

따라서, 함수 ㄱ이 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

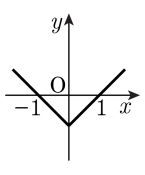
13. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f^{-1}(3)=1$, $(f\circ f)(x)=x$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

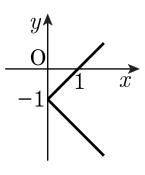
① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

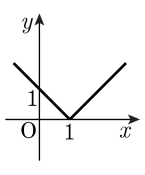
해설

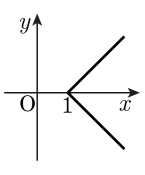
$(f\circ f)(x)=x$ 에서 $f=f^{-1}$
따라서 $f(3)=f^{-1}(3)=1$

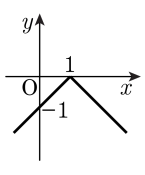
14. 다음 중 함수 $|y| = x - 1$ 의 그래프를 구하면?

① 

② 

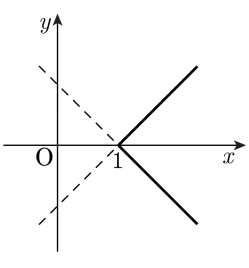
③ 

④ 

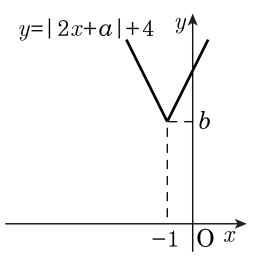
⑤ 

해설

$|y| = x - 1$ 에서
$y \geq 0$ 일 때,
$y = x - 1$
$y < 0$ 일 때,
$-y = x - 1,\ y = -x + 1$
따라서, 그래프는 다음
그림과 같다.



15. 함수 $y = |2x + a| + 4$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 점 $(-1, b)$ 를 지난다. 이때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?



① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

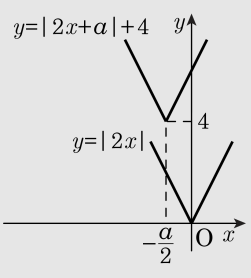
해설

$y = |2x + a| + 4$

$= \left|2\left(x + \frac{a}{2}\right)\right| + 4$

즉, 함수 $y = |2x + a| + 4$ 의 그래프는 함수 $y = |2x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{a}{2}$ 만큼,

y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.



이때, 그래프의 꺾인 점의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2}, 4\right)$ 이고,

문제에서 $(-1, b)$ 이므로

$-\frac{a}{2} = -1,\ b = 4$

$\therefore\ a = 2,\ b = 4 \quad \therefore\ ab = 8$

16. 함수 $f(x) = | x-2 | -1 | + k$ 에 대하여 $f(-1) = 5$ 를 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(-1) = 5$ 이므로

$f(-1) = | -1-2 | -1 | + k = 2 + k = 5$

따라서 $k = 3$ 이므로

$\therefore\ f(5) = | 5-2 | -1 | + 3 = 5$

17. 1보다 큰 자연수 x에 대하여 $f(x) = \dfrac{x - \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{1}{x}}$ 로 정의 할 때, $f(25)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 26

해설

$$f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{\frac{x - 1}{x}} = x + 1$$

$\therefore f(25) = 26$

18. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$을 만족하는 상수 a, b의 합 $4a + b$를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$에서

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$

$\therefore a + b = 2$

19. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$
즉 $2kx + k^2 - k = 0$
모든 x 에 대하여 성립하므로 $k = 0$

20. 함수 $f(x)$에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=x+2$ 일 때, $f(x)$ 는 무엇인가?

① $f(x)=x+2$ ② $f(x)=x-2$ ③ $f(x)=2x$

④ $f(x)=2x+1$ ⑤ $f(x)=2x+2$

해설

$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=x+2$ $\cdots$㉠에서

$\frac{x+1}{2}=t$라 하면 $x=2t-1$ 이므로

이를 ㉠에 대입하면 $f(t)=2t-1+2=2t+1$

$\therefore\ f(x)=2x+1$

21. 함수 $f(x) = x + 1$라 할 때, $f^{10}(2)$ 의 값을 구하여라. (단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$)

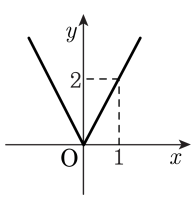
▶ 답:

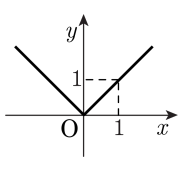
▷ 정답: 12

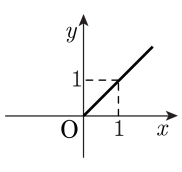
해설

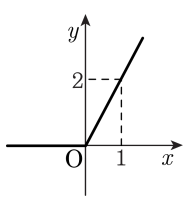
$$
\begin{aligned}
f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x+1) \\
&= (x+1) + 1 = x + 2 \\
f^3(x) &= (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = f^2(x+1) \\
&= (x+1) + 2 = x + 3 \\
f^4(x) &= (f^3 \circ f)(x) = f^3(f(x)) = f^3(x+1) \\
&= (x+1) + 3 = x + 4 \\
&\cdots \\
f^n(x) &= x + n \\
\therefore\ f^{10}(2) &= 2 + 10 = 12
\end{aligned}
$$

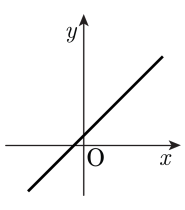
22. 다음 중 함수 $y = x + |x|$의 그래프는?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$y = x + |x|$ 에서
$x \le 0$ 일 때 $y = x - x = 0$ 이고
$x > 0$ 일 때 $y = x + x = 2x$ 이다.
따라서 주어진 함수의 그래프는 ④와 같다.

23. 직선 $y = m|x-1|+2$ 와 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 10일 때, m의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{1}{5}$ ④ $-\frac{2}{5}$ ⑤ 1

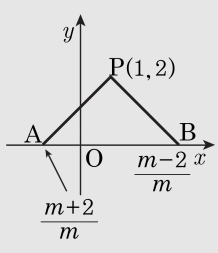
해설

$y = m|x-1|+2$

i) $x \geq 1$ 일 때 $y = mx - m + 2 \cdots$ ㉠

ii) $x < 1$ 일 때 $y = m - mx + 2 \cdots$ ㉡

m 에 관계없이 정점 $(1,\ 2)$을 지난다.



x절편은 ㉠에서 $x = \frac{m-2}{m}$

㉡에서 $x = \frac{m+2}{m}$

그림에서 $\overline{AB}$ 의 길이는

$\frac{m-2}{m} - \frac{m+2}{m} = \frac{-4}{m}$

$\therefore$ $\triangle PAB$의 면적이 10이므로

$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{4}{m}\right) = 10$

$10m = -4$

$\therefore\ m = -\frac{2}{5}$

해설

삼각형의 넓이가 10일 때 높이가 2이므로

$\overline{AB} = 10$

즉 그래프의 x절편이 $-4,\ 6$이다.

$y = m|x-1|+2$에 $(6,\ 0)$을 대입하면

$0 = m|6-1|+2,\ 5m = -2$

$\therefore m = -\frac{2}{5}$

24. 삼차함수 $y = ax^3$ 의 그래프의 설명 중 틀린 것은?

① x 축에 대하여 대칭이다.

② 원점에 대하여 대칭이다.

③ $a > 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

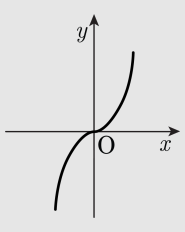
④ $|a|$ 가 크면 클수록 y 축에 가깝다.

⑤ $a < 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

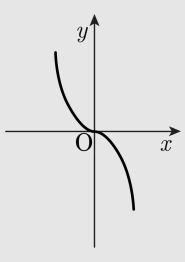
해설

$f(x) = ax^3$ 의 그래프는 다음과 같다.

(i) $a > 0$



(ii) $a < 0$



따라서 그래프는 x 축에 대하여 대칭이 아니다.

25. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를 만족시키는 함수 $y = f(x)$의 그래프의 일부분이 다음 그림과 같이 지워져 있다. 다음 보기는 함수 $y = f(x)$에 대한 설명이다. M, N의 합을 구하여라.

> $-4 \le x \le -2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 M이고, $0 \le x \le 2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 N이다.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를
만족시키므로 주어진 함수는 기함수
즉, 원점 대칭이다. 따라서 그래프를 완성하면
다음 그림과 같으므로

$-4 \le x \le -2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $M = 2$이고,
$0 \le x \le 2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $N = 1$이다.
$\therefore M + N = 3$

26. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f가 $f(x) = 2x + 1$로 정의될 때, 함수 f의 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$
$f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$
$f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$
$f(4) = 2 \times 4 + 1 = 9$ 이므로
함수 f의 치역은 $\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$
따라서, 치역의 모든 원소의 합은 $3 + 5 + 7 + 9 = 24$

27. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g에 대하여 $f(x)$는 항등함수이고, $g(x) = -2$일 때, $f(4) + g(-1)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

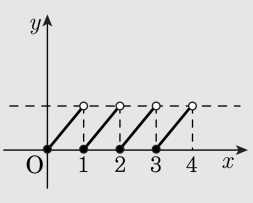
해설

$f(x)$는 항등함수이므로
$f(x) = x$에서 $f(4) = 4$,
$g(x) = -2$에서 $g(-1) = -2$
$\therefore\ f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

28. $y = x - [x] (0 \le x \le 4)$ 의 그래프를 그릴 때, 그래프의 길이를 구하면?
($[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 4 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 8

해설



$y = x - [x]$ 에서

i) $0 \le x < 1$ 인 경우 $y = x - 0$

ii) $1 \le x < 2$, $y = x - 1$

iii) $2 \le x < 3$, $y = x - 2$

iv) $3 \le x \le 4$, $y = x - 3$

i), ii), iii), iv)를 그래프로 그리면 다음과 같다. 그러므로 각각의 길이는 $\sqrt{2}$ 이 일정하므로

$4\sqrt{2}$ 가 된다.

29. 실수의 집합을 R이라 할 때, 함수 $f : R \to R$가 다음과 같이 정해져 있다. 이 때, 일대일 대응인 것은?

① $f(x) = ax + b \ (a \neq 0)$　② $f(x) = x^2$

③ $f(x) = |x|$　④ $f(x) = 2$

⑤ $f(x) = \dfrac{1}{x}$

해설

치역이 실수이고 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 것은 증가만 하거나 감소만 하는 그래프이다.
①은 직선으로서 $a > 0$이면 증가하고 $a < 0$이면 감소하는 그래프이다.

30. 다음 보기 중 $X = \{-1,\ 1,\ 2\}$에서 $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

ㄱ $f : x \to |x|^2$　　ㄴ $g : x \to x + 2$

ㄷ $h : x \to |x| + 1$　　ㄹ $i : x \to x^2 - 1$

ㅁ $j : x \to |x| + 3$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

ㄱ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$
$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$
$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$

ㄴ $g(-1) = -1 + 2 = 1 \in Y$
$g(1) = 1 + 2 = 3 \in Y$
$g(2) = 2 + 2 = 4 \in Y$

ㄷ $h(-1) = |-1| + 1 = 2 \in Y$
$h(1) = |1| + 1 = 2 \in Y$
$h(2) = |2| + 1 = 3 \in Y$

ㄹ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$

ㅁ $j(2) = 5 \notin Y$

그러므로 ㄹ, ㅁ은 함수가 될 수 없고 ㄱ, ㄴ, ㄷ 3개 만 함수가 될 수 있다.

31. $f(x)=\dfrac{2x-1}{2x+1}$ 에 대하여 $f(25)$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{45}{51}$ ② $\dfrac{46}{51}$ ③ $\dfrac{47}{51}$ ④ $\dfrac{48}{51}$ ⑤ $\dfrac{49}{51}$

해설

$\therefore f(25)=\dfrac{2\times 25-1}{2\times 25+1}=\dfrac{49}{51}$