

1. 수직선 위의 두 점 P(2), Q(x)에 대하여 $\overline{PQ} = 3$ 이고, x의 값을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

i) $x > 2$ 일 때, $x - 2 = 3 \therefore x = 5$
ii) $x < 2$ 일 때, $2 - x = 3 \therefore x = -1$
따라서 α, β 의 값은 -1 또는 5
 $\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 26$

2. 점 $(1, 2)$ 를 지나고, x 축에 평행한 직선의 방정식을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : $y = 2$

해설

점 $(1, 2)$ 를 지나고 x 축에 평행한 직선이므로
 $\therefore y = 2$

3. 직선 $(a-2)y = 3(a-1)x - 1$ 이 실수 a 의 값에 관계없이 반드시 지나는 사분면은?

- ① 제 1사분면
② 제 1사분면 또는 제 2사분면
③ 제 2사분면
④ 제 3사분면
⑤ 제 4사분면

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면

$$(3x-y)a - 3x + 2y - 1 = 0$$

따라서, $3x-y=0$, $-3x+2y-1=0$ 에서

$$x = \frac{1}{3}, y = 1$$

주어진 직선은 항상 제 1 사분면 위의 점 $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 을 지난다.

4. 점 $(4, 1)$ 과 직선 $4x - 3y - 9 = 0$ 사이의 거리를 구하면?

- ① 1 ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을

이용하면, $\Rightarrow \frac{|4 \times 4 + 1 \times (-3) - 9|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5}$

5. $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 1 = 0$ 과 중심이 같고, 원점을 지나는 원의 반지름의 길이를 구하면?

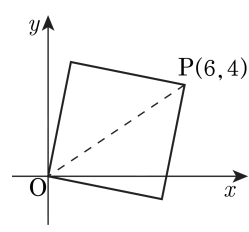
① 4 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 8x - 6y - 1 &= 0 \\ \Rightarrow (x + 4)^2 + (y - 3)^2 &= 26 \\ \text{중심 : } (-4, 3) \\ \therefore (x + 4)^2 + (y - 3)^2 &= r^2, \\ (0, 0) \text{을 지나므로} \\ r &= 5 (\because r > 0) \end{aligned}$$

6. 다음 그림과 같은 정사각형의 넓이는?

- ① 16 ② 20 ③ 26
④ 32 ⑤ 52



해설

$\overline{OP} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ 이므로
주어진 정사각형의 한 변의 길이를 a 라고 하면
 $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{52}$ 에서 $a^2 = 26$ 이다.
따라서 정사각형의 넓이는 26이다

7. 길이가 3인 선분을 같은 방향으로 2:1로 내분하는 점과 외분하는 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

길이가 3인 선분을 OA라 하고,
O를 원점으로 잡으면 A는 A(3)
이 선분을 2:1로 내분하는 점을 P(x_1)라 하면

$$x_1 = \frac{2 \times 3 + 1 \times 0}{2 + 1} = 2$$

2:1로 외분하는 점 Q(x_2)라 하면

$$x_2 = \frac{2 \times 3 - 1 \times 0}{2 - 1} = 6$$

따라서 $PQ = 6 - 2 = 4$

8. 세 점 A (1, 5), B (-4, -7), C (5, 2)가 좌표평면 위에 있다. $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 점 D의 좌표를 구하면?

- ① (0, 0) ② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$$\overline{AB} = 13, \overline{AC} = 5$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$$

D는 B, C를 13 : 5로 내분한 점

$$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

9. 세 점 A(-1, 0), B(2, -3), C(5, 3)에 대하여 등식 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax + y + b = 0$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
주어진 조건에서,
 $(x+1)^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y+3)^2$
 $= 2[(x-5)^2 + (y-3)^2]$
 $2x^2 - 2x + 2y^2 + 6y + 14$
 $= 2(x^2 - 10x + y^2 - 6y + 34)$
 $18x + 18y - 54 = 0$
 $\Rightarrow x + y - 3 = 0$
 $\therefore a + b = 1 + (-3) = -2$

10. $x^2 + y^2 + x - y + k = 0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 하는 상수 k 의 값의 범위는?

- ① $k \leq \frac{1}{2}$ ② $k < \frac{1}{2}$ ③ $k > \frac{1}{2}$ ④ $k \geq \frac{1}{2}$ ⑤ $k < \frac{1}{3}$

해설

주어진 방정식을 정리하면,

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - k$$

$\therefore$ 원이 되려면, $\frac{1}{2} - k > 0 \rightarrow k < \frac{1}{2}$

11. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

12. 기울기가 -1 이고, 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 직선의 방정식은?

① $y = -x \pm 2$ ② $y = -x \pm 3$ ③ $y = -x \pm 4$

④ $y = -x \pm 2\sqrt{2}$ ⑤ $y = -x \pm 4\sqrt{2}$

해설

구하는 직선의 기울기는 -1 이므로

$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$ 에서

$$y = -x \pm 2\sqrt{1+1}$$

$$\therefore y = -x \pm 2\sqrt{2}$$

13. 두 점 A(-2, 3), B(1, 1)와 x 축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은?

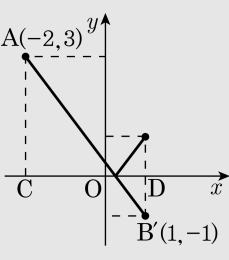
- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

해설

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값이 최소가 되려면 점 B와 x 축에 대한 대칭점을 B'이라 할 때, 세 점 A, P, B'이 한 직선 위에 있을 때이다. 그림에서처럼 점 B와 x 축에 대한 대칭점은 B'(1, -1)이다.

그런데 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최소가 되는 것은 세 점 A, P, B'이 한 직선 위에 놓일 때이다. 따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $\overline{AB'}$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AB'} &= \sqrt{\{1 - (-2)\}^2 + \{(-1) - 3\}^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\end{aligned}$$



14. 원점 O와 두 정점 A(2, 3), B(4, 0)에 대하여 $\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 을 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

② $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 29 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 29 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 29 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 + 12x + 6y + 29 = 0$

해설

P의 좌표를 P(x, y)라 하면

$\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 이므로

$$x^2 + y^2$$

$$= \{(x-2)^2 + (y-3)^2\} + \{(x-4)^2 + y^2\}$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$$

15. 수직선 위의 세 점 A(1), B(7), C(10) 과 동점 $P(x)$ 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 이 최소가 되는 점 P 의 좌표를 구하면?
- ① P(5) ② P(6) ③ P(7) ④ P(8) ⑤ P(9)

해설

$$\begin{aligned} &\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 \\ &= (x-1)^2 + (x-7)^2 + (x-10)^2 \\ &= 3(x-6)^2 + 42 \end{aligned}$$

따라서, $x = 6$ 일 때 최소가 된다.

16. 세 직선 $x + y + 2 = 0$, $x - y - 4 = 0$, $3x - ky - 9 = 0$ 이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의 조건은?

- ① $-3 \leq k \leq 3$, $k < -6$ ② $k = 2$, $k = \pm 3$
 ③ $-3 < k < 3$, $k > 6$ ④ $k \neq 2$, $k \neq \pm 3$
 ⑤ $-3 < k$ 또는 $k > 3$

해설

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ x - y - 4 = 0 & \cdots \textcircled{2} \\ 3x - ky - 9 = 0 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

이 삼각형이 되려면 세 직선이 한 점에서 만나지 않고, 어느 두 직선도 평행하지 않아야 하므로

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 교점은 $(1, 3)$ 이 $\textcircled{3}$ 위에 있지 않다.

$$\therefore 3 + 3k - 9 \neq 0 \quad \therefore k \neq 2$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ 은 평행하지 않으므로

$$\frac{1}{3} \neq \frac{1}{-k} \rightarrow k \neq -3$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 은 평행하지 않으므로,

$$\frac{1}{3} \neq \frac{-1}{-k} \rightarrow k \neq 3$$

$$\therefore k \neq 2, k \neq \pm 3$$

17. 점 (5, 3) 으로 부터의 거리가 2 이고, 점 (2, 1) 을 지나는 직선의 방정식은?

- ① $y = x, 12x - 5y - 19 = 0$
② $y = 1, 12x - 5y - 19 = 0$
③ $y = 1, 12x - 5y + 5 = 0$
④ $y = 1, 4x - 5y - 8 = 0$
⑤ $y = -1, 12x + 5y - 12 = 0$

해설

점 (2, 1) 을 지나는 직선의 기울기를 m 이라 하면 $y - 1 = m(x - 2) \cdots \textcircled{1}$

점 (5, 3) 과 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리가 2 이므로

$$\frac{|m(5-2) - 3 + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2$$

$$(3m - 2)^2 = 4(m^2 + 1)$$

$$5m^2 - 12m = 0$$

$$\therefore m = 0, \frac{12}{5}$$

$\textcircled{1}$ 에 대입하면 $y = 1, 12x - 5y - 19 = 0$

18. 두 직선 $3x+2y-1=0$ 과 $2x-3y+1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들 중 x 와 y 의 좌표가 모두 정수인 점에 대한 다음 설명 중 옳은 것만을 골라 놓은 것은?

- I. 위 조건을 만족하는 점은 유한개이다.
II. 제2사분면의 점들 중에서 위 조건을 만족하는 것이 없다.
III. 제3사분면에 있는 모든 점들의 y 좌표는 5의 배수이다.

- ① I ② II ③ III ④ I, III ⑤ II, III

해설

두 직선에서 같은 거리에 있는 점을 $P(a, b)$ 라고 하면
 $\frac{|3a+2b-1|}{\sqrt{13}} = \frac{|2a-3b+1|}{\sqrt{13}}$
 $3a+2b-1=2a-3b+1$ 또는
 $3a+2b-1=-2a+3b-1$ 이므로
 $a+5b-2=0, 5a-b=0$ 에서
 $x+5y-2=0, 5x-y=0$
즉, $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$ 와
 $y=5x$ 위에 있는 모든 점들은
주어진 두 직선에서 이르는 거리가 같다.
I. 이러한 좌표는 무한개 존재한다.
II. $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$
위의 점, 예를 들면 $(-3, 1)$ 이 있다.
III. $y=5x$ 로 x 가 정수일 때,
 y 좌표는 5의 배수이다.

19. 두 점 A(3, 0), B(-2, 0) 에서의 거리의 비가 2 : 3 인 점 P 의 자취의 넓이는?

① 9π ② 16π ③ 25π ④ 36π ⑤ 49π

해설

점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$$

즉 $4\overline{PB}^2 = 9\overline{PA}^2$ 이므로

$$4\{(x+2)^2 + y^2\} = 9\{(x-3)^2 + y^2\}$$

$$x^2 + y^2 - 14x + 13 = 0$$

$$\therefore (x-7)^2 + y^2 = 36$$

따라서 점 P 는 중심이 (7, 0) 이고,

반지름의 길이가 6 인 원 위를 움직이므로

구하는 자취의 넓이는 $\pi \cdot 6^2 = 36\pi$

20. 다음 두 식을 동시에 만족하는 x 가 1개일 때, r 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. $M + m$ 의 값을 구하면?

$$\begin{aligned}x^2 + (y - 4)^2 &= 9 \\ x^2 + y^2 &= r^2\end{aligned}$$

- ① 6
- ② 7
- ③ 8
- ④ 9
- ⑤ 10

해설

두 원의 중심이 각각 $(0, 0)$, $(0, 4)$ 이므로
두 원의 중심거리 d 는

$$d = \sqrt{(0 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = 4$$

두 식을 동시에 만족하는 x 가 1개이므로
두 원은 다음 그림과 같이 한 점에서 만
난다.

(i) 외접할 경우

$$4 = r + 3 \text{ 에서 } r = 1$$

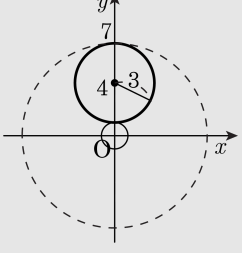
$$\therefore m = 1$$

(ii) 내접할 경우

$$4 = r - 3 \text{ 에서 } r = 7$$

$$\therefore M = 7$$

$$\therefore M + m = 1 + 7 = 8$$



21. 두 원 $x^2 + y^2 - x + 2y - 3 = 0$, $2x^2 + 2y^2 - 6x + ay - 2 = 0$ 의 공통현이 직선 $y = -3x - 1$ 과 직교할 때, 상수 a 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 4
- ④ 8
- ⑤ 16

해설

두 원의 공통현의 방정식은
 $2(x^2 + y^2 - x + 2y - 3) - (2x^2 + 2y^2 - 6x + ay - 2) = 0$
즉, $4x + (4 - a)y - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$
직선 $\textcircled{1}$ 과 직선 $y = -3x - 1$ 은 직교하므로
 $\frac{-4}{4 - a} \times (-3) = -1$ 에서 $a = 16$

22. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가
반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore n > 4$ ($\because n$ 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5이다.

23. 중심이 C(1, 2)이고, 직선 L : $x + 2y = 0$ 에 접하는 원의 반지름을 r 이라 할 때 r^2 은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

중심에서 접선까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로

$$\text{반지름은 } \frac{|1 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

∴ 구하는 원의 방정식은

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 \text{ 이므로}$$

$$\therefore r^2 = 5$$

24. 원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = mx + n$ 일 때, $3m + n$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(-3, 4)$ 을 지나는 방정식 : $y = m(x+3) + 4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는
반지름과 같다.

$$\Rightarrow \frac{|m \times (-2) - 1 \times 1 + 3m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow (m+3)^2 = 10m^2 + 10$$

$$\Rightarrow (3m-1)^2 = 0, m = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = \frac{1}{3}x + 5 \Rightarrow 3m + n = 6$$

25. 점 $(1, 3)$ 을 지나는 직선이 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 접할 때, 접점의 좌표 또는 접선의 방정식으로 옳지 않은 것은?
- ① 접점의 좌표: $(2, 1)$
- ② 접선의 방정식: $2x + y - 5 = 0$
- ③ 접점의 좌표: $(-1, 2)$
- ④ 접선의 방정식: $x - 2y + 5 = 0$
- ⑤ 접점의 좌표: $(1, 2)$

해설

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 5 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때, 접선 $\textcircled{1}$ 은 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$x_1 + 3y_1 = 5 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

또한, 접점 (x_1, y_1) 은 원 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 5 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 에서 $x_1 = 5 - 3y_1$ 을 $\textcircled{3}$ 에 대입하여 풀면

$$x_1 = 2, y_1 = 1 \text{ 또는 } x_1 = -1, y_1 = 2$$

따라서, 구하는 접점의 좌표는 $(2, 1), (-1, 2)$

이것을 각각 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$2x + y - 5 = 0 \text{ 또는 } x - 2y + 5 = 0$$