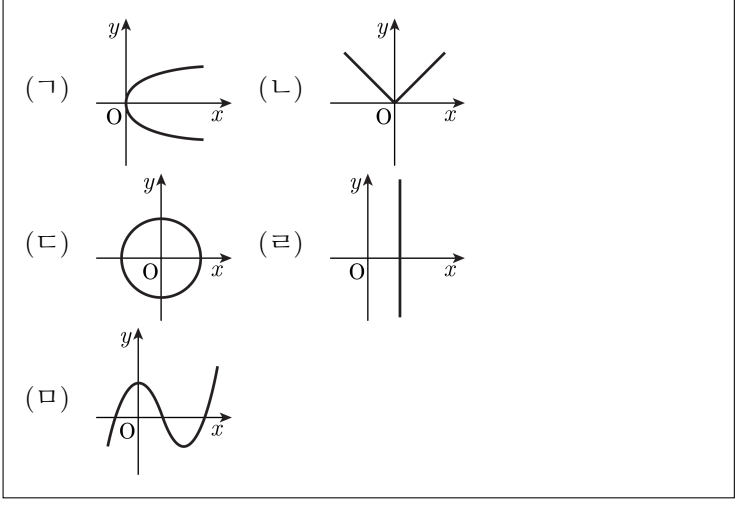


1. 다음의 곡선 중 $f: x \rightarrow y$ 인 함수의 그래프가 되는 것을 모두 고르면?



- ① (㉡), (㉢)
- ② (㉡), (㉣)
- ③ (㉡), (㉤)
- ④ (㉡), (㉣), (㉤)
- ⑤ (㉠), (㉡), (㉢), (㉣), (㉤)

해설

- (㉠) $x > 0$ 인 x 에 대하여 y 가 두 개씩 대응하므로 함수의 그래프가 아니다.
- (㉡) 모든 x 에 대하여 y 가 하나씩 대응하므로 함수의 그래프가 된다.
- (㉢) 정의역 안에 있는 x 에 대하여 y 가 하나 또는 두 개씩 대응하므로 함수가 아니다.
- (㉣) 어떤 x 에 대해서는 무수히 많은 y 가 대응하므로 함수가 아니다.
- (㉤) 모든 x 에 대하여 y 가 하나씩 대응하므로 함수가 된다.

2. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = |2x - 3|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $f(X)$ 의 원소가 아닌 것은 무엇인가? (단, $f(X)$ 는 함수 f 의 치역)

① 1

② 2

③ 3

④ 5

⑤ 7

해설

$f(x) = |2x - 3|$ 에서

$f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, $f(4) = 5$, $f(5) = 7$ 이므로

$f(X) = \{1, 3, 5, 7\}$

$\therefore 2 \notin f(X)$

3. $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 개수를 구하면?

① 6 개 ② 8 개 ③ 18 개 ④ 24 개 ⑤ 27 개

해설

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

4. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합 X 의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로
 $2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$ 에서
 $3x^2 - 12x - 15 = 0$, $3(x^2 - 4x - 5) = 0$
 $(x - 5)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = 5, -1$
즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$ 일 때 $f(x) = g(x)$ 이다.
 $\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$

5. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ ax + b & (x > 1) \end{cases} \text{가 일대일대응이 되도록 하는 두 상수 } a, b$$

의 값으로 적당한 것은 무엇인가?

- ① $a = 1, b = -1$ ② $a = 1, b = 1$ ③ $a = 2, b = -1$

- ④ $a = 2, b = 0$ ⑤ $a = -1, b = 2$

해설

f 가 일대일대응이 되려면

$y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같아야 한다.

즉, 직선 $y = ax + b$ 가

점 $(1, 1)$ 을 지나야 하므로

$$a + b = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

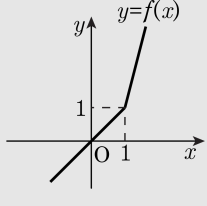
또, 직선 $y = x$ 의 기울기가 양이므로 직선

$y = ax + b$ 의 기울기도 양이어야 한다.

$$\therefore a > 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

따라서 주어진 보기 중 ①, ②을

모두 만족시키는 것은 ③이다.



6. 다음은 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수이다. 일대일 대응인 것은 무엇인가?

$$\textcircled{1} \quad y = -x^2$$

② $y = -|x|$

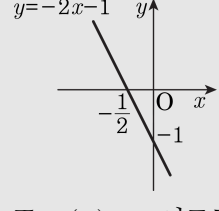
③ $y = 3$

④ $y = -2x - 1$

⑤ $y = \sqrt{2}x - 2 \ (x \geq 1)$

해설

① $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) = f(1) = -1$ 이므로 일대일 함수가 아니다.



또, $f(X) \leq 0$ 이므로 (공역) $\neq$ (치역)
 ② $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) \equiv f(1) \equiv -$

② $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) = f(1) = -1$ 이므로
일대일 함수가 아니다.

또, $f(X) \leq 0$ 이므로 (공역) $\neq$ (치역)
 ③ 모든 $x \in Y$ 에 대하여 $f(x) = 3$ 이

③ 모든 $x \in X$ 에 대하여 $f(x) = 3$ 이므로
일대일 함수가 아니다.

또, $f(X) = 3$ 이므로 (공역) $\neq$ (치역)

④ 일대일 함수이고 (공역)=(치역)=(실수 전체의 집합)이므로 일대일 대응이다.

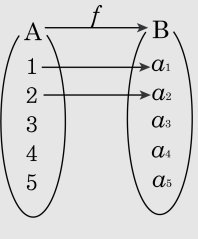
⑤ $x \geq 1$ 일 때, $f(x) \geq 0$ 이므로

일대일 함수이지만 (공역) $\neq$ (치역)이다.

7. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?
- ① 8 개 ② 25 개 ③ 64 개
④ 81 개 ⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수
 $f : A \rightarrow B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소
3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중
하나를 각각 대응시키면 된다.
따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 =$
125 (개)



8. 다음 <보기> 중에서 자연수 전체의 집합 N 에서 N 으로의 함수가 되는 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{n}$ 을 대응시킨다.
- ㉡ 자연수 n 에 n 의 양의 약수의 개수를 대응시킨다.
- ㉢ 홀수에는 1, 짝수에는 2, 소수에는 3을 대응시킨다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

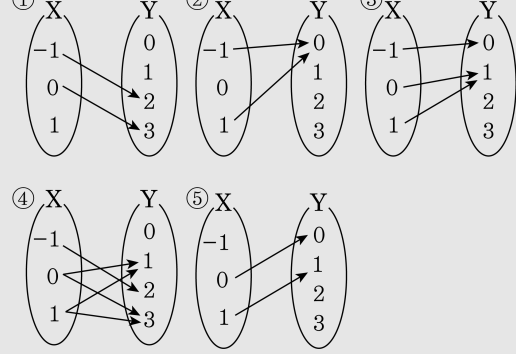
자연수에서 자연수로의 함수라는 말의 의미는 정의역이 자연수 일 때, 치역도 자연수인 함수를 찾으라는 말이다. 그런데 이때 ㉠은 무리수가 치역에 포함되지 않으므로 정의에 타당하지 않다. ㉢에서 2는 짝수이며 소수이므로 옳지 않다. 따라서 ㉡만 옳다.

9. $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 이라 한다. X 의 임의의 원소 x 에 대하여 다음과 같은 X 에서 Y 로의 대응을 생각할 때, 이 중 X 에서 Y 로의 함수인 것은?
- ① $x \rightarrow x + 3$
- ② $x \rightarrow x^2 - 1$
- ③ $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 1 \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 0 \end{cases}$
- ④ $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow \text{홀수} \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 2 \end{cases}$
- ⑤ $x \rightarrow x^3$

해설

X 에서 Y 로의 함수가 되려면 X 의 원소가 빠짐없이 Y 의 원소 하나에 대응해야 한다.

순서대로 대응도를 만들어 보면 다음과 같다.



①, ②, ⑤는 Y 의 원소에 대응하지 않는 X 의 원소가 존재하므로 함수가 될 수 없고 ④는 X 의 원소 하나가 Y 의 원소 두 개에 대응하는 경우가 생기므로 역시 함수가 될 수 없다.

10. 다음 중 함수가 아닌 것을 고르면?

① $2y = x - 1$

② $y = -x^2 - 8$

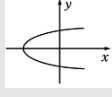
③ $y = 5$

④ $x = y^2 - 4$

⑤ $y = 3|x| - 1$

해설

함수는 하나의 x 값에 두 개 이상의 y 값이 대응될 수 없다.



④ : $x = y^2 - 4$

11. $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 일 때, $x \in X$ 인 임의의 x 에 대한 다음의 대응 중에서 함수가 아닌 것은?

① $x \rightarrow 1$

② $x \rightarrow |x|$

③ $x \rightarrow x^2 + 1$

④ $x \rightarrow 2x$

⑤ $x \rightarrow x^2 + x + 1$

해설

④ $f(-1) = -2$ 이므로 함숫값이 공역에 존재하지 않으므로 함수가 아니다.

12. $X = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid -3 \leq y \leq 3\}$ 에서 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b$ (단, $a > 0$) 로 정의되는 함수 f 가 일대일 대응이 되도록 a , b 의 값을 정하면?

- ① $a = \frac{3}{2}, b = 0$ ② $a = \frac{1}{2}, b = 0$ ③ $a = \frac{3}{2}, b = 1$
④ $a = \frac{5}{2}, b = 0$ ⑤ $a = 2, b = 0$

해설

f 가 일대일 대응이고 $a > 0$ 이므로

$$\begin{cases} f(-2) = -2a + b = -3 \\ f(2) = 2a + b = 3 \end{cases}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}, b = 0$$

13. $f : X \rightarrow Y$, $x \rightarrow f(x)$ 라 한다. X 의 임의의 두 원소를 a, b 라 할 때, 다음 중에서 f 가 일대일 함수일 조건은?

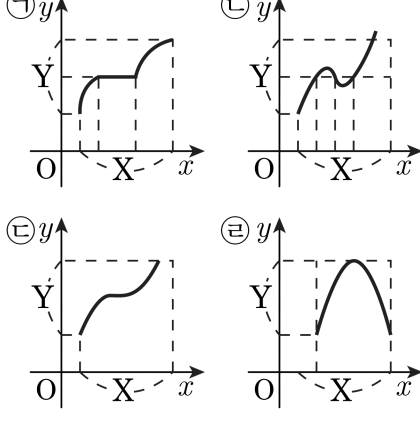
- ① $a = b$ 이면 $f(a) = f(b)$ ② $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$
③ $f(a) \neq f(b)$ 이면 $a \neq b$ ④ $a \neq b$ 이면 $f(a) = f(b)$
⑤ $a = b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$

해설

일대일함수의 정의

「 $a \neq b$ 이면, $f(a) \neq f(b)$ 」의 대우

14. 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?



- ① (㉠) (㉢)
 ② (㉡) (㉣)
 ③ (㉢) (㉣)
- ④ (㉠)
 ⑤ (㉠) (㉡) (㉣)

해설

X 에서 Y 로의 일대일 대응을 찾으면 된다.

㉠

㉡

㉠ $\{x|a \leq x \leq b\}$ 에 속하는 x 의 상이 모두 c 이므로 일대일 대응이 아니다.

㉡ a, b, c 의 상이 모두 d 이므로 일대일 대응이 아니다.

㉢, ㉣의 경우와 같다.

15. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$ 가 있다. X 에서 Y 로의 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 64개

해설

$a \rightarrow$, $b \rightarrow$, $c \rightarrow$

Y 의 원소 p, q, r, s 에서 세 개를 뽑아 위 안에
넣어 놓는 방법의 수를 구하는 것이다.

이 때 세 개의 수는 모두 같거나,

두 개만 같거나 모두 달라도 좋다.

따라서 a 에는 p, q, r, s 의 4가지,

b 에는 a 에 온 수가 와도 좋으므로 역시 4가지,

마찬가지로 c 에는 a, b 에 온 수가

와도 좋으므로 4가지씩이 있다.

$\therefore 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64(\text{개})$

16. 이차방정식 $3x^2 - x + 2 = 0$ 의 한 근을 A , 이차방정식 $x^2 - 3x - 6 = 0$ 의 한 근을 B 라 할 때, $3A^2 + B^2 - A - 3B$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$3A^2 - A + 2 = 0, B^2 - 3B - 6 = 0$ 이므로

$3A^2 - A = -2, B^2 - 3B = 6$

$\therefore 3A^2 + B^2 - A - 3B$
 $= 3A^2 - A + B^2 - 3B$
 $= -2 + 6 = 4$

17. $7x - 5 < 4(x + 1)$ 이고 x 는 자연수일 때, $x^2 - 5x + 6 = 0$ 를 풀면?

① $x = 0, x = 1$

② $x = 2$

③ $x = 2, x = 3$

④ $x = 3$

⑤ $x = -2, x = 3$

해설

$7x - 5 < 4(x + 1)$ 에서 $7x - 4x < 4 + 5, 3x < 9 \therefore x < 3$
따라서 x 의 값은 1, 2이다.

$x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 해는 $x = 2, x = 3$ 이므로 해는 $x = 2$ 가 된다.

18. $x^2 - 3x + 1 = 0$ 일 때, $x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x - 3 + \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\begin{aligned} x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 9 - 2 + 3 = 10 \end{aligned}$$

19. 두 이차방정식 $2x^2 - ax + 2 = 0$, $x^2 - 3x + b = 0$ 의 공통인 해가 2일 때, ab 의 값을 구하면?

① -25 ② -10 ③ 1 ④ 10 ⑤ 25

해설

주어진 식에 x 대신 2를 대입하면

$$8 - 2a + 2 = 0, \quad a = 5$$

$$4 - 6 + b = 0, \quad b = 2$$

$$\therefore ab = 10$$

20. 이차방정식 $(x-1)^2 = 3-k$ 의 근에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $k = -6$ 이면 근이 2개이다.
- ② $k = -1$ 이면 정수인 근을 갖는다.
- ③ $k = 0$ 이면 무리수인 근을 갖는다.
- ④ $k = 2$ 이면 근이 1개이다.
- ⑤ $k = 4$ 이면 근이 없다.

해설

$$(x-1)^2 = 3-k, \quad x-1 = \pm \sqrt{3-k}$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{3-k}$$

음수의 제곱근은 존재하지 않으므로 근호 안에 있는 수는 음수가 될 수 없다.

$3 > k$: 근이 0개

$k = 3$: 근이 1개

$3 < k$: 근이 2개

21. 이차방정식 $x^2 - 6x + (a - 1) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 자연수 a 값을 모두 더하면?

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 18

해설

$$x^2 - 6x = -a + 1, x^2 - 6x + 9 = -a + 10, (x - 3)^2 = -a + 10$$

$$x - 3 = \pm \sqrt{-a + 10}, x = 3 \pm \sqrt{10 - a}$$

두 근이 정수가 되려면 $10 - a$ 가 제곱수가 되어야 하므로

$$10 - a = 9, 4, 1 \text{ 에서 } a = 1, 6, 9$$

따라서 a 값들의 합은 $1 + 6 + 9 = 16$ 이다.

22. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k + 2 = 0$ 의 해가 1개일 때, 상수 k 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$3x^2 - 6x + k + 2 = 0$$

$$3(x^2 - 2x) = -k - 2$$

$$3(x^2 - 2x + 1) = -k - 2 + 3$$

$$3(x - 1)^2 = -k + 1$$

중근을 가져야 하므로 $-k + 1 = 0$, $k = 1$ 이다.

23. 선물 가게에 원가가 1000원인 물건이 있다. 원가의 $a\%$ 의 이익을 붙여서 정가를 정하였다가 할인 기간에 정가의 $2a\%$ 를 할인하여 팔았더니 120원의 손해를 보았다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

원가 : 1000원

정가 : $1000 \times \left(1 + \frac{a}{100}\right)$ 원

$$1000 \times \left(1 + \frac{a}{100}\right) \times \left(1 - \frac{2a}{100}\right) + 120 = 1000$$

$$-10a - \frac{1}{5}a^2 + 1000 + 120 = 1000$$

$$a^2 + 50a - 600 = 0$$

$$(a + 60)(a - 10) = 0$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 10$$

24. 세 자리 자연수가 있다 각 자리의 수의 합은 10 이고, 가운데 자리의 수의 4배는 다른 두 자리의 수의 합과 같다.
또, 이 자연수의 각 자리의 수를 거꾸로 늘어놓아 얻은 자연수는 처음 자연수보다 198만큼 크다. 처음 자연수는?

- ① 235 ② 325 ③ 532 ④ 523 ⑤ 358

해설

일, 십, 백의 자리의 수를 각각 p, q, r 라 하면
 p, q 는 0 이상 10 미만의 정수이고
 r 은 1 이상 10 미만의 자연수이다.

$$\begin{cases} p + q + r = 10 \cdots \textcircled{1} \\ 4q = p + r \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $q = 2$

$$100p + 20 + r = 100r + 20 + p + 198$$

$$p - r = 2 \cdots \textcircled{3}$$

$$q = 2 \text{ 를 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면 } p + r = 8 \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \text{ 에서 } p = 5, r = 3$$

따라서 구하는 수는 325 이다.

25. 어떤 무리수 a 가 있다. a 의 소수 부분을 b 라 할 때 a 의 제곱과 b 의 제곱의 합이 15이다.

무리수 a 의 값이 $\frac{m \pm \sqrt{n}}{2}$ 일 때, $m + n$ 을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$$a^2 + b^2 = 15, 0 \leq b < 1$$

$$0 \leq b^2 = 15 - a^2 < 1, \quad \sqrt{14} < a \leq \sqrt{15}$$

따라서 a 의 정수 부분은 3이고 $b = a - 3$

$$a^2 + (a - 3)^2 = 15$$

$$\therefore a = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$$

$$\therefore m + n = 3 + 21 = 24$$